République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Hadj Lakhdar Batna1
Faculté de Sciences
Département des Sciences de la Matière

THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de
DOCTORAT en SCIENCES

OPTION

Rayonnement

Par

Halimi Farida

Thème

Techniques des intégrales de chemins appliquées à la Solution des problèmes en optique quantique et mécanique Quantique

---

Soutenue devant le jury composé de :

Zaim Slimane	**Prof.**	**Université**	**Batna**	**Président**
Aouachria Mekki	**Prof.**	**Université**	**Batna**	**Rapporteur**
Delenda Yazid	**MCA**	**Université**	**Batna**	**Examinateur**
Mebarki Nourddine	**Prof.**	**Université**	**Constantine**	**Examinateur**
Moumni Mustafa	**MCA**	**Université**	**Biskra**	**Examinateur**
Boussahel Mounir	**MCA**	**Université**	**M'sila**	**Examinateur**

Table des matières

Introduction générale

La représentation des intégrales de chemins d'un système quantique est trés utile pour visualiser la dynamique quantique en termes de conceptions classiques. Cette formulation introduite par R.P. Feynman [1] pour quantifier des mouvements de systémes au moyen d'integrales fonctionnelles,est utilisée au même titre que l'équation de Schrödinger et Heisenberg. Intervenant pratiquement

dans tous les domaines de la physique et plus particulièrement en théorie quantique des champs.La conception essentielle dans cette approche est le propagateur qui (comme fonction de Green de

l'équation de Schrodinger) contient toutes les informations sur le système. Ce propagateur étant une somme de contributions de tous les chemins, le principe de la superposition se manifeste déja

dans cette formulation, on peut dire sans exagérer qu'elle est concurrente à d'autre méthodes de quantification. Se basant essentiellement sur les notions simples et connés de la mécanique classique

comme les chemins ou trajectoires, l'action, le lagrangien, ...elle permet de d'écrire de maniére élégante l'évolution des systémes.

Et depuis l'introduction des transformations spatio-temporelles dans le formalisme des intégrales de chemins ([2] ; [3]), et surtout les corrections purment quantiques, une classe de potentiels a été soulitionnée.

Cependant malgré le succés apparent de cette formulation théorique, du point de vue pratique il subsiste certains difficultés comme l'obtention de solutions de certains problémes solubles par l'équation de Schrödinger .

En plus il restait le probléme du spin dont la difficulté principale réside dans le fait que cette grandeur physique n'a pas d'analogue classique. Sa nature exclusivement discréte rend sa description

difficile au moyen de chemins qui par essence sont continue.

Des modèles à cet effet, ont été élaborés, comme le modèle bosonique ou fermionique de Schwinger [4], et surtout l'introduction de variables anticommutantes dites de Grassmann et les variables angulaires [5] ont permis de contourner cette difficulté. Du point de vue pédagogique, des solutions pour des interactions combinant le spin et d'autre variables par l'équation de Schrödinger peuvent être trouvées dans des livres de mécanique quantique usuels. Par le formalisme des intégrales de chemin, il n'y a que quelques interactions de ce type qui ont été traités [6] en utilisant le modèle de Schrödinger . Pour ce faire, il est nécessaire d'élargir l'espace de configuration habituelle et par voie de conséquence, l'espace des états cohérents (chapitre 1) peut être adéquat à cette étude. Comme on va le voir à travers cette thèse, l'utilisation des états cohérents est parfois nécessaire pour le calcul du propagateur si l'on doit formuler suivant l'idée de Feynman, à savoir une somme sur les chemins

possibles, ces chemins étant affectés d'un poids c'est à dire $\int D\left(path\right)\exp\frac{i}{\hbar}S\left(path\right),\ S=\int Ldt$ c'est l'action du système.

Il existe plusieurs façons pour représenter le spin dans le formalisme des intégrales de chemins.Nous utilisons la plus simple, la représentation avec les angles polaires [7]. Les variables angulaires

(chapite 1) sont utilisées tout au long de cette thèse.

Le but de ce travail, à travèrs cette thèse, est d'utiliser le formalisme des intégrales de chemins dans la représentation des états cohérents de spin pour étudier le comportement d'un atome à deux

niveaux d'énergie sous l'infuence d'une onde électromagnétique classique de polarisation circulaire. Il est naturel de décrire, le mouvement de l'atome douée d'un spin$\frac{1}{2}$, par deux espaces, l'un des

positions ou de configuration pour décrire le mouvement de l'atome suivant l'axe z et l'espace des états cohérents de spin, pour décrire le mouvement interne de l'atome.

Les fonctions d'onde sont déduites dans (chapitre 2).signalons calcules de ce deuxième chapitre ont été réalisés récennement par [8] ; [9] en utilisant le modéle fermionique de Schwinger pour le spin, et ceux de l'article de ([10] ; [11]) en considérant l'équation de Schrödinger .

l éxtension de ce traitement à une onde éléctromagnétique quantifie d'un seul mode dans une cavité en présence de l'effet de Kerr tont l'hamiltonien et pseudo-hermitique fait l'objet du troisième chapitre. Les fonctions d'onde le spectroe que la métrique du systéme sont déduite. Signalons aussi que les calculs de ce dernier chapitre sont aussi basés sur l'article [12] en considérant l'équation de Schrödinger .

La procédure du traitment, comme il a été précisé avant, nécessite l'utilisation de deux espaces l'un de configuration, l'autre des états cohérents, pour décrire les mouvements respectivement extérieur et intérieur de l'atome.

Pour les deux problémes, nous avons retrouvé les mêmes résultats qui ont été obtenus en résolvant l'équation de Schrödinger .

Chapitre 1

Etats Cohérents de l'oscillateur harmonique et de moment angulaire :

1.1 Introduction :

Les états cohérents $|Z\rangle$ de l'oscillateur harmonique ont été introduit pour la première fois par Schrödinger en 1926 en cherchant le minimum de la relation d'Heisenberg [13] . Ces états cohérents ont été généralisés par Perelomov [14] et leurs introductions dans le formalisme des intégrales de chemins au moyen des états cohérents de type bosoniques ou fermioniques, et en fonctions des angles qui ont été faits par divers auteurs comme Klauder [15] , Ohniki et Kashiwa , [16] et Klauder respectevement [17] .Les états cohérents sont utilisés dans les differents domaines de la physique particuliéremet en optique quantique [18] . Par exemple le champ produit par un laser et décrit par un états cohérent bosonique . Ils ont un nombre de propriétés intéressantes, et sont définis alternativement par :

i)états propres de l'opérateur d'annihilation a qui vérifient la relation de commutation $\left[a^{\dagger}, a\right] = 1$.

ii)sont crées à partir de l'état de vide $|0\rangle$ par l'opérateur unitaire dit de déplacement D.

iii)états pour lesquels l'incertitude de Heisenberg est minimale .

1.2 Propriétés des états cohérents d'un oscillateur harmonique :

– Considérons donc le problème aux valeurs propres de l'opérateur de destruction a

Les valeurs propres de l'opérateur de destruction a :

$$a\,|Z\rangle = Z\,|Z\rangle \ , \tag{1.1}$$

où Z est un nombre complexe . L'adjoint de cette relation est :

$$\langle Z|\overset{+}{a} = \overset{*}{Z}\,\langle Z| \ . \tag{1.2}$$

Nous allons montrer l'existence des états $|Z\rangle$ en les construisant explicitement . Pour cela, nous multiplions (1.1) par $\langle n|$ état nombre :

$$\langle n\,|a|\,Z\rangle = Z\langle n\,|Z\rangle \ . \tag{1.3}$$

Par ailleurs, l'adjoint de la relation $a^{\dagger}\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ et $\langle n|\,a = \sqrt{n+1}\,\langle n+1|$. Multipliant cette égalité par $|Z\rangle$ conduit à :

$$\langle n\,|a|\,Z\rangle = \sqrt{n+1}\langle n+1\,|Z\rangle \ . \tag{1.4}$$

En égalant les membres de droite des deux dernière égalités, nous obtenons :

$$\langle n\,|Z\rangle = \frac{Z}{\sqrt{n}}\langle n-1\,|Z\rangle = \frac{Z^n}{\sqrt{n!}}\langle 0\,|Z\rangle \ . \tag{1.5}$$

En utilisant la décomposition de l'unité $1=\sum_n |n\rangle\langle n|$, on trouve :

$$|Z\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|\,Z\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\langle 0\,|Z\rangle\ \ , \tag{1.6}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}\langle Z\,|Z\rangle &= \langle 0\,|Z\rangle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^n}{\sqrt{n!}}\langle Z\,|n\rangle\\ &= \langle 0\,|Z\rangle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^n}{\sqrt{n!}}\frac{(Z^*)^n}{\sqrt{n!}}\langle z\,|0\rangle\end{aligned}$$

$$=|\langle 0\,|z\rangle|^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|Z|^{2n}}{n!}=|\langle 0\,|Z\rangle|^2\,e^{|Z|^2}\ . \tag{1.7}$$

Puisque la norme est finie, sa valeur est arbitraire . Donc, nous faisons le choix :

$$\langle 0\,|Z\rangle=\langle Z\,|0\rangle=e^{-|Z|^2/2}\ \ , \tag{1.8}$$

ce qui conduit à $\langle Z\,|Z\rangle=1$. De cette manière, les états propres de l'opérateur de destruction a sont univoquement définis comme :

$$|Z\rangle=e^{-|Z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\quad . \tag{1.9}$$

On appelle *états cohérents* les états propre (1.9) . L'expression (1.9) pour les l'états cohérents $|Z\rangle$ résulte de l'action d'un opérateur agissant sur le vide . Pour ce

travail, nous partons de la propriété :

$$e^{Za^\dagger}\,|0\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^n}{\sqrt{n!}}\left(a^\dagger\right)^n|0\rangle\quad . \tag{1.10}$$

Puisque $a\left|0\right\rangle = 0\left|0\right\rangle$, on peut remplacer $\left|0\right\rangle$ par $e^{-z^{*}a}\left|0\right\rangle$ sans rien modifier . Donc :

$$e^{-|Z|^2/2}e^{Za^{\dagger}}e^{-Z^{*}a}\left|0\right\rangle = e^{-|Z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^n}{\sqrt{n!}}\left|n\right\rangle = \left|Z\right\rangle \quad . \tag{1.11}$$

Pour terminer cette dérivation, nous utilisons le théorème :

$$e^{A}e^{B} = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} \ , \tag{1.12}$$

pour tout couple d'operateurs A et B qui commutent avec leur commutateur . Ce théorème conduit au résultat :

$$\left|Z\right\rangle = e^{Za^{\dagger}-Z^{*}a}\left|0\right\rangle = D\left(Z\right)\left|0\right\rangle , \tag{1.13}$$

qui exprime d'une maniμere compacte la relation entre le vide et un état cohérent en terme d'un opérateur unitaire de déplacement $D\left(Z\right)$. L'opérateur $D\left(Z\right)$: vérifie les propreiétés et es suivantes :

$$D\left(Z\right)D^{+}\left(Z\right) = D^{+}\left(Z\right)D\left(Z\right) = 1 \ , D^{+}\left(Z\right) = D\left(-Z\right), \tag{1.14}$$

$$D\left(Z\right)D\left(Z^{'}\right) = \exp\left(\frac{ZZ^{'*} - Z^{*}Z^{'}}{2}\right)D\left(Z + Z^{'}\right), \tag{1.15}$$

d'ou

$$D\left(Z\right)D\left(Z^{'}\right) = \exp\left(ZZ^{'*} - Z^{*}Z^{'}\right)D\left(Z^{'}\right)D\left(Z\right). \tag{1.16}$$

Il est facile de montrer que

$$\left[a, D\left(Z\right)\right] = ZD\left(Z\right) \ , \quad \left[a^{+}, D\left(Z\right)\right] = Z^{*}D\left(Z\right) \ , \tag{1.17}$$

$$D^{+}\left(Z\right)aD\left(Z\right) = a + Z \quad , D^{+}\left(Z\right)a^{+}D\left(Z\right) = a^{+} + Z^{\ *}, \tag{1.18}$$

pour cette raison, l'operateur $D(Z)$ est appelé opérateur de déplacement . Il reste une difficulté à sur monter, c 'est celle de vérifier que les états cohérents forment une base orthonormée . Nous allons démontrer dans cette section que les états cohérents forment une base, mais d'une nature assez particulière car elle n'est pas orthogonale . Nous allons aussi voir qu'il est parfaitement possible de travailler avec une base qui ne bénéficie pas de cette propriété qui semble essentielle en mecanique quantique . Nous savons déjà que la definition (1.9) impliquent que les états cohérents sont normalisables, et nous avons fait le choix $\langle Z | Z \rangle = 1$. Considérons maintenant le produit scalaire de deux états cohérents :

$$\begin{aligned} \left\langle Z \middle| Z' \right\rangle &= \exp\left[-\left(| Z |^2 + | Z' |^2 \right)/2 \right] \sum_{n,m}^{\infty} \frac{Z^{*^n} (Z')^m}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}} \langle n | m \rangle \\ &= \exp\left[-\left(| Z |^2 + | Z' |^2 \right)/2 \right] \sum_{n,m}^{\infty} \frac{(Z^* Z')^n}{n!} \ , \end{aligned}$$

$$= \exp\left[-\left(| Z |^2 + | Z' |^2 \right)/2 \right] \exp\left(Z^* Z' \right) \ , \tag{1.19}$$

et donc

$$| \left\langle Z \middle| Z' \right\rangle |^2 = \exp\left(- | Z - Z' |^2 \right) . \tag{1.20}$$

Les états cohérents ne sont pas orthogonaux et ne peuvent donc pas former un ensemble de vecteurs linéairement idépendants . Par contre, il a une propriété essenstielle qui reste vérifié, à savoir

l'existence d'une relation de fermuture ou décomposition de l'unité . Pour démontrer cela, nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int |Z\rangle\langle Z|\, d^2Z &= \frac{1}{\pi}\int e^{-|Z|^2}\sum_{n,m}^{\infty}\frac{Z^{*^n}(Z')^m}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}}\,|n\rangle\langle m|\, d^2Z \\
&= \sum_{n,m}^{\infty}\frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}}\int_0^{+\infty} e^{-|Z|^2} \mid Z\mid^{n+m} \\
\times \quad | & \quad Z \mid d \mid Z \mid \int_0^{2\pi} d\ \theta e^{i(n-m)\theta} \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{n,m}^{\infty}\frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}}2\pi\delta_{n,m}\int_0^{+\infty} \mid Z\mid^{n+m+1} e^{-|Z|^2} d\mid Z\mid, \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

on pose $x = \mid Z\mid^2$d'ou :

$$\frac{1}{\pi}\int |Z\rangle\langle Z|\, d^2Z = \frac{1}{\pi}\sum_{n,m}^{\infty}\frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}}2\pi\delta_{n,m}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx\ ,$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n,m}^{\infty}\frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}}2\pi\ \delta_{n,m}\ n! = \sum_{n}^{\infty}|n\rangle\langle n| = 1\ , \qquad (1.22)$$

cette relation représente la relation de ferméture et tout état peut s'écrire dans la base des états cohérents :

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle = \sum_{n}^{\infty} c_n\,|n\rangle = \sum_{n}^{\infty} c_n \left(\overset{+}{a}\right)^n |0\rangle &= \Psi\left(\overset{+}{a}\right)|0\rangle \\
&= \frac{1}{\pi}\int |Z\rangle\langle Z|\,\Psi\left(\overset{+}{a}\right)|0\rangle\, d^2Z \\
&= \frac{1}{\pi}\int |Z\rangle\langle Z\,|0\rangle\,\Psi\left(Z^*\right) d^2Z\ , \qquad (1.23)
\end{aligned}$$

en utilisant la relation (1.8) ; ceci conduit à l'égalité .

En particulier, si $|\Psi\rangle$ est l'état cohérent $|Z'\rangle$, on a :

$$c_n = e^{-|Z'|^2/2} \frac{Z'^n}{\sqrt{n!}} \ , \tag{1.24}$$

$$\Psi\left(Z^*\right) = \sum_{n}^{\infty} e^{-|Z'|^2/2} \frac{\left(Z' Z^*\right)^n}{n!} \ , \tag{1.25}$$

et donc :

$$|Z'\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2 Z e^{-\left(|Z|^2 + |Z'|^2 - 2Z^* Z'\right)/2} |Z\rangle \ . \tag{1.26}$$

Ainsi la base des états cohérents est surcomplète puisque tout vecteur de la base peut être exprimé comme une combinaison linéaire de tous les vecteurs de la base .

Etudions maintenant les propriétés physiques de ces états cohérents.

– La valeur moyenne du nombre de photons dans un états cohérent $|Z\rangle$:

$$\langle n \rangle = \left\langle Z \left| a^{\dagger} a \right| Z \right\rangle = |Z|^2 \ . \tag{1.27}$$

La valeur moyenne de n^2dans ce même états :

$$\langle n^2 \rangle = \left\langle Z \left| a^{\dagger} a a^{\dagger} a \right| Z \right\rangle = \left\langle Z \left| a^{\dagger} a^{\dagger} a a + a^{\dagger} a \right| Z \right\rangle = |Z|^4 + |Z|^2 = \langle n \rangle^2 + \langle n \rangle \ . \tag{1.28}$$

La variance d'un état cohérent :

$$\Delta n = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle \ . \tag{1.29}$$

La fluctuation du nombre de photons :

$$f\ (n) = \frac{\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2}{\langle n\rangle^2} = \frac{1}{\langle n\rangle}\ . \tag{1.30}$$

Cette propriété que les états cohérents tirent leur nom . C'est aussi par le biais de cette propriété qu'une relation peut être établie entre les états cohérents .

le champ produit par un laser qui est en bonne première approximation dans un état cohérent . La probabilité de trouver n photons dans l'état

cohérent $|Z\rangle$ est donnée par la distribution de poison :

$$P_n = \left|\langle n\,|Z\rangle\right|^2 = \frac{|Z|^{2n}}{n\ !}e^{-|Z|^2} = \frac{\langle n\rangle^n}{n\ !}e^{-\langle n\rangle}\quad . \tag{1.31}$$

Pour terminer cette section , nous allons évaluer les valeurs moyennes de la position et de l'impulstion dans l'état cohérent . Ces valeurs peuvent être obtenus

en exprimant X et P en fonction de a et $a^\dagger$:

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\ \omega}}\left(a^\dagger + a\right)\ ,\ P = i\sqrt{\frac{\hbar m\ \omega}{2}}\left(a^\dagger - a\right), \tag{1.32}$$

par un calcul simple en trouve :

$$\langle X\rangle_Z = \langle Z\,|X|\,Z\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\ \omega}}\,(Z + Z^*)\quad ,\langle P\rangle_Z = \langle Z\,|P|\,Z\rangle = i\sqrt{2\hbar m\ \omega}\,(Z - Z^*)\,, \tag{1.33}$$

$$\langle X^2\rangle_Z = \frac{\hbar}{2m\ \omega}\left[(Z + Z^*)^2 + 1\right]\quad ,\langle P^2\rangle_Z = \frac{\hbar m\ \omega}{2}\left[1 - (Z - Z^*)^2\right], \tag{1.34}$$

et donc :

$$\Delta X_Z = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\ \omega}} \quad , \Delta P_Z = \sqrt{\frac{m\ \omega}{2\hbar}}. \tag{1.35}$$

On note que $\Delta X.\Delta P$ prend sa valeur minimale :

$$\Delta X_Z.\Delta P_Z = \frac{\hbar}{2} , \tag{1.36}$$

qui ce traduit par la relation :

$$\langle Z \left| a^{\dagger} a \right| Z \rangle = \langle Z \left| a^{\dagger} \right| Z \rangle \langle Z \left| a \right| Z \rangle , \tag{1.37}$$

pour les états $|\psi\rangle \neq |Z\rangle$ qui sont diffèrent des états cohérents l'incertitude de Heiesberg s'écrit :

$$\langle \psi \left| a^{\dagger} a \right| \psi \rangle \geq \langle \psi \left| a^{\dagger} \right| \psi \rangle \langle \psi \left| a \right| \psi \rangle . \tag{1.38}$$

1.3 Propagateur dans la base des états cohérents bosonique :

L'amplitude de transition de l'état initial $|Z_i\rangle$ à l'instant $t = t_i = 0$ vers l'état final $|Z_f\rangle$ à $t = t_f = T$, est définie par les éléments de matrice de l'opérateur d'évolution du temps :

$$K(Z_f, Z_i; T) = \langle Z_f \mid \mathbf{U}(T, 0) \mid Z_i \rangle , \tag{1.39}$$

où

$$\mathbf{U}(T, 0) = \mathbf{T}_D \exp(-\frac{i}{\hbar} \int_0^T H dt), \tag{1.40}$$

avec $\mathbf{T}_D$ est l'opérateur chronologique de Dyson . Pour passer à la représentation des intégrales de chemin subdivisons l'intervalle de temps $[0, T]$ en $N+1$ intervalles de longueur ε pour lesquels les N instants intermédiaires se répartissant régulièrement entre 0 et T . C'est-à-dire $T = (N+1)\varepsilon$ et à la fin on prend la limite $N \to \infty$. On peut écrire l'operateur d'évolution sous cette forme :

$$\mathbf{U}\left(T, 0\right) = \prod_{n=1}^{n=N+1} \mathbf{U}(t_n\ ; t_{n-1}) \ . \tag{1.41}$$

Nous introduisons les relations de fermetures entre chaque paire de $\mathbf{U}(\varepsilon)$ aux instants t_1 , t_2 ,....t_N :

$$\frac{1}{\pi} \int |Z_n\rangle \langle Z_n| \, d^2 Z_n = 1 \ . \tag{1.42}$$

Le propagateur prend la forme suivante :

$$K\left(Z_f\ , Z_i\ ; T\right) = \lim_{N \to \infty} \int .. \int \prod_{n=1}^{n=N} \frac{d^2 Z_n}{\pi} \prod_{n=1}^{n=N+1} \langle Z_n| \, e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar} H} \, |Z_{n-1}\rangle \ \ . \tag{1.43}$$

En evaluant l'élément de matrice figurant dans (1.43) on premier ordre en ε :

$$\begin{aligned}
\langle Z_n| \, e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar} H} \, |Z_{n-1}\rangle &\simeq \langle Z_n| \, 1 - \frac{i\ \varepsilon}{\hbar} H \ \ |Z_{n-1}\rangle \\
&= \langle Z_n \, |Z_{n-1}\rangle \left[1 - \frac{i\ \varepsilon}{\hbar} \frac{\langle Z_n| \, H \ \ |Z_{n-1}\rangle}{\langle Z_n \, |Z_{n-1}\rangle} \right] \\
&\simeq \langle Z_n \, |Z_{n-1}\rangle \, e^{-\frac{i\ \varepsilon}{\hbar} H\ (Z_{n-1}, Z_n^*)} \ ,
\end{aligned} \tag{1.44}$$

avec

$$H\ \ (Z_{n-1}, Z_n^*) = \frac{\langle Z_n| \, H \ \ |Z_{n-1}\rangle}{\langle Z_n \, |Z_{n-1}\rangle} \ , \tag{1.45}$$

et le produit de deux états cohérents est donné par la relation (1.19) . Dans ce cas le propagateur s'écrit sous la forme discrète suivante :

$$K\left(Z_f\ ,Z_i\ ;T\right)=\lim_{N\to\infty}\int..\int\prod_{n\ =1}^{n\ =N}\frac{d^2Z_n}{\pi}\exp\left[\frac{i\ \varepsilon}{\hbar}\sum_{n\ =1}^{\infty}\left[\frac{i}{2}\left(Z_n^*\frac{\Delta Z_n}{\varepsilon}-Z_n\frac{\Delta Z_n^*}{\varepsilon}\right)-H\ \left(Z_{n-1},Z_n^*\right)\right]\right]\ . \tag{1.46}$$

A la limite continue on obtient l'expression du propagateur dans la représentation des états cohérénts bosonique :

$$K\left(Z_f\ ,Z_i\ ;T\right)=\int DZ\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int\left[\frac{i}{2}\left(Z^*\dot{Z}-Z\dot{Z}^*\right)-H\ \left(Z_{n-1},Z_n^*\right)\right]\right]\ , \tag{1.47}$$

avec

$$DZ=\lim_{N\to\infty}\prod_{n\ =1}^{n\ =N}\frac{d^2Z_n}{\pi}\ . \tag{1.48}$$

1.4 Les états cohérénts du moment angulaire :

Les états cohérents du moment angulaire peuvent être considérés comme les états quantiques associés au système classique dont le moment cinétique possède une direction déterminée . Dans la représentation associée aux états cohérents, tout élément diagonal d'un observable vers l'observable classique associée, lorsque le moment cinétique devient grand (limite classique) . Par exemple, la valeur

moyenne du moment dipolaire éléctrique dans un état cohérent possède les mêmes caractéristiques que le dipôle optique classique .

Ces états cohérents de moment angulaire minimisent les inégalités appropriée de même que les états cohérents bosonique pour faire les inégalités de Heisenberg . Ceux-ci concernent les inégalités du triplet d'opérateurs S_x ; S_y , S_z , à partir de $[S_x, S_y] = iS_z$ on obtient les inégalités pour le produit des variances calculées dans un état arbitraire $|\psi\rangle$.

$$\langle(\Delta S_x)^2\rangle^{\frac{1}{2}}\langle(\Delta S_y)^2\rangle^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}\left|\langle S_z\rangle\right| \ , \tag{1.49}$$

avec

$$\Delta S_x = S_x - \langle S_x\rangle \quad , \quad \Delta S_y = S_y - \langle S_y\rangle \ \text{ et } \ \langle S_z\rangle = \langle\psi\left|S_z\right|\psi\rangle \ . \tag{1.50}$$

Lorsque $|\psi\rangle = |s\ ,m\rangle$, avec $S_z\ |s\ ,m\rangle = m\,|s\ ,m\rangle$ on peut voir que :

$$|m| \leq s(s+1) - m^2 \ . \tag{1.51}$$

L'égalité est atteinte lorsque la projection de S_z suivant le vecteur $\overrightarrow{k}$: $m = \pm s$ c'est-à-dire pour les états $\left|\overrightarrow{k}\right\rangle = |s\ ,\pm s\rangle$.

L'état $|s\ ,s\rangle$ sera considéré comme l'état quantique associé au système classique dont le moment angulaire pointe dans la direction Oz .

Par la suite , l'état quantique associé à un moment angulaire classique pointant dans la direction $\overrightarrow{n}$ repérée par les angles (θ, φ) sera obtenu à l'aide de la rotation amenant Oz sur $\overrightarrow{n}$. On définira donc *l'état cohérent du moment angulaire* $|\Omega\rangle = |\theta, \varphi\rangle$, associé au vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$, par :

$$|\Omega\rangle = |\theta\ ,\varphi\rangle = e^{-i\varphi S_z}e^{-i\theta S_y}\,|s\ ,s\rangle\,. \tag{1.52}$$

Cet état est le résultat du produit de 2 rotations d'angles θ et φ autour des axes z et y de l'état $\left|\overrightarrow{k}\right\rangle = |s\ ,s\rangle$.

Les états cohérents ne forment pas un ensemble orthonormé . Le produit scalaire de deux états cohérents angulaires :

$$\langle \Omega | \, \Omega' \rangle = \left[\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} \right]^{2s} . \tag{1.53}$$

Les états $|\Omega\rangle$ forment un ensemble complétif . On peut en effet montrer la relation de fermeture :

$$\frac{2s+1}{4\pi} \int d\varphi d\cos(\theta) \, |\Omega\rangle \, \langle\Omega| = \mathbf{I} \; . \tag{1.54}$$

Nous considérons maintenant un spin $s = 1/2$ décrit par les opérateurs de spin S_i , $i = (x \;, y \;, z)$ avec l'espace de Hilbert à deux dimensions engendrées : par exemple par les vecteur propre $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ de S_z . Pour chaque orientation dans l'espace réel caractérisé par un angle polaire θ et un angle azimutal φ on peut introduire un état cohérent de spin .

$$|\Omega\rangle = |\theta \;, \; \varphi\rangle = e^{-i\varphi S_z} e^{-i\theta S_y} \, |\uparrow\rangle \;\; . \tag{1.55}$$

Ces états ne sont pas orthogonales, mais constituent une base complète dans l'espace de Hilbert . Le produit scalaire de deux états cohérents de spin et de projection sont respectivement :

$$\langle \Omega | \, \Omega' \rangle = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} \; . \tag{1.56}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int d\varphi d\cos(\theta) \, |\Omega\rangle \, \langle\Omega| = \mathbf{I} \; . \tag{1.57}$$

En outre, les éléments de matrice des opérateurs de spin prennent la forme suivante :

$$\langle\Omega|\, S_z \,|\Omega'\rangle = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}\right] \;, \tag{1.58}$$

$$\langle\Omega|\, S_x \,|\Omega'\rangle = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')} + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}\right] \;, \tag{1.59}$$

$$\langle\Omega|\, S_y \,|\Omega'\rangle = \frac{1}{2i}\left[\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')} - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}\right] \;. \tag{1.60}$$

1.5 Propagateur dans la base des états cohérents angulaires :

L'amplitude de tansition de l'état initial $|\Omega_i\rangle$ à l'instant $t = t_i = 0$ vers l'état final $|\Omega_f\rangle$ à $t = t_f = T$, est définie par les éléments de matrice de l'opérateur d'évolution du temps :

$$K\left(\Omega_f \;, \Omega_i \;; T\right) = \langle\Omega_f\, |\mathbf{U}\,(T,0)|\, \Omega_i\rangle \;, \tag{1.61}$$

$$\mathbf{U}\,(T,0) = \mathbf{T}_D \exp(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T H dt) \;, \tag{1.62}$$

$\mathbf{T}_D$ est l'opérateur chronologique de Dyson . Pour passer à la représentation path-intégral subdivisons l'intervalle de temps $[0, T]$ en $N+1$ intervalles de longueur ε pour lesquels les N instants intermédiaires se répartissant régulièrement entre 0 et T . C'est-à-dire $T = (N + 1)\varepsilon$ et à la fin on prend la limite $N \to \infty$. On peut écrire l'opérateur d'évolution sous cette forme :

$$\mathbf{U}\,(T \;,\; 0) = \prod_{n=1}^{n=N+1} \mathbf{U}(t_n \;;\; t_{n-1}) \;. \tag{1.63}$$

Introduisons les relations de fermetures entre chaque paire de $\mathbf{U}(\varepsilon)$ aux instant t_1 , t_2 , ...t_N :

$$\frac{1}{2\pi}\int d\varphi_n d\cos(\theta_n)\, |\Omega_n\rangle\, \langle\Omega_n| = \mathbf{I} \;. \tag{1.64}$$

Le propagateur prend la forme :

$$K\left(\Omega_f\ ,\Omega_i\ ;T\right)=\lim_{N\rightarrow\infty}\int....\int\prod_{n=1}^{n=N}\frac{1}{2\pi}d\varphi_n d\cos(\theta_n)\prod_{n=1}^{n=N+1}\left\langle\Omega_n\right|e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H(t_n)}\left|\Omega_{n-1}\right\rangle\ . \tag{1.65}$$

Evaluant l'élément de matrice figurant dans (1.64) , premier ordre en ε :

$$\left\langle\Omega_n\right|e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H}\left|\Omega_{n-1}\right\rangle=\left\langle\Omega_n\right|1-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H\ \ \left|\Omega_{n-1}\right\rangle+O\left(\varepsilon^2\right)$$

$$=\left\langle\Omega_n\right|\Omega_{n-1}\rangle\left[1-i\frac{\varepsilon}{\hbar}\frac{\left\langle\Omega_n\right|H\ \ \left|\Omega_{n-1}\right\rangle}{\left\langle\Omega_n\right|\Omega_{n-1}\rangle}\right]+O\left(\varepsilon^2\right)$$

$$\simeq\left\langle\Omega_n\right|\Omega_{n-1}\rangle e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}\mathcal{H}(\Omega_{n-1},\Omega_n)}\ , \tag{1.66}$$

avec

$$\mathcal{H}\left(\Omega_{n-1}\ ,\ \Omega_n\right)=\frac{\left\langle\Omega_n\right|H\left|\Omega_{n-1}\right\rangle}{\left\langle\Omega_n\right|\Omega_{n-1}\rangle}\ . \tag{1.67}$$

Le propagateur s'écrit sous la forme discrète suivante :

$$\begin{aligned}K\left(\Omega_f\ ,\Omega_i\ ;T\right)\ \ &=\ \ \lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\int....\int\prod_{n=1}^{n=N}\frac{1}{2\pi}d\varphi_n d\cos(\theta_n)\\&\times\exp\left\{\sum_{n=1}^{N+1}\left[\log\left\langle\Omega_n\right|\Omega_{n-1}\rangle-i\frac{\varepsilon}{\hbar}\mathcal{H}\left(\Omega_{n-1}\ ,\ \Omega_n\right)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{1.68}$$

Ayant obtenula forme conventionnelle de Feynman

$$K=\int Dpath\exp(iaction(path)), \tag{1.69}$$

il nous reste à les appliquer sur des système physiques quantiques en vue d'extraire les propriétés physiques qui nous intéressent.

Chapitre 2

Atome à deux niveaux instables en interaction avec une onde électromagnétique de polarisation circulaire

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous appliquons la téchinque des intégrales de chemins dans le calcul propagateur d'un atome à deux niveaux non-instables de la masse m , fréquence de transition ω_a et le moment dipolaire $\overrightarrow{D}$ interagi avec une onde eléctromagnétique polarisée circulaire propageant dans la direction positive z. Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ de l'onde électromagnétique est :

$$E = \left(E_0 \cos\left(\omega_L \ t - kz\right), -E_0 \sin\left(\omega_L \ t - kz\right), 0\right) \ , \tag{2.1}$$

où E_0 , ω_L , $\overrightarrow{k}$ sont l'amplitude , fréquence de transition et le vecteur d'onde respectivement .

La dynamique de l'atome dans l'interaction avec l'onde électromagnétique est décrite par le hamiltonien suivant :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z - \frac{i\hbar}{2}\begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} + V \ , \tag{2.2}$$

où le premier terme représente l'énergie cinétique liée au centre de masse le long de la direction z ,

le deuxième et troisième termes décrivent le mouvement interne de l'atome avec $\gamma_1 = \frac{1}{\tau_1}$ et $\gamma_2 = \frac{1}{\tau_2}$.

V : l'interaction entre le moment dipolaire de l'atome et le champ électromagnétique s'écrit dans l'approximation dipolaire :

$$V = -DE = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\hbar\Omega e^{i(\omega_L t - kz)} \\ -\frac{1}{2}\hbar\Omega e^{i(\omega_L t - kz)} & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{2.3}$$

où $DA = \frac{1}{2}\hbar\Omega$.

L'hamiltonien relatif au probléme de ce chapitre (2.2) a la forme suivante :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\hbar(\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2})\sigma_z - \frac{i\hbar\gamma_+}{4}I - \frac{1}{2}\hbar\Omega e^{-i(\omega_L t - kz)}\sigma_+ - \frac{1}{2}\hbar\Omega e^{i(\omega_L t - kz)}\sigma_- \ . \tag{2.4}$$

où

$$H = H_0 + H_{int} \ , \tag{2.5}$$

avec

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{i\hbar\gamma_+}{4}I \quad , \tag{2.6}$$

et

$$H_{int} = \frac{1}{2}\hbar(\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2})\boldsymbol{\sigma}_z - \frac{1}{2}\hbar\Omega e^{-i(\omega_L t - kz)}\boldsymbol{\sigma}_+ - \frac{1}{2}\hbar\Omega e^{i(\omega_L t - kz)}\boldsymbol{\sigma}_- \ , \tag{2.7}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.8}$$

Etant les matrices de Pauli habituelles .

Cet hamiltonien a été étudie récemment [11] en considérant l'équation de Schrödinger et par [9] en considerant les integrales du chemin dans la représentation des états cohérents fermioniques. Nous proposons dans ce chapitre de retrouver tous les résultats à savoir :

Les fonctions d'onde en utilisant le formalisme intégrale du chemins en combinant l'espace de configuration et la représentation des états cohérents de spin. Passons d'abord à la construction du formalisme intégrale du chemins.

2.2 Formalisme intégrale du chemin en représentation des états cohérents de spin :

Il ya plusieurs façons de représenter le spin dans le formalisme des intégrale du chemin ([19] , [20]) . Nous utilisons la façon la plus simple qui consiste à :

-Remplacer σ par le vecteur unitaire $\vec{n}$ dirigé selon (θ, φ) .

-associant un état cohérent $|\Omega\rangle$

$$|\Omega\rangle = |\theta;\varphi\rangle = e^{-i\varphi s_z} e^{-i\theta s_y} |\uparrow\rangle \ , \tag{2.9}$$

obtenu à partir de deux rotations des angles θ et φ autour de Z et y axes sur l'état $|\uparrow\rangle$, dont le produit scalaire et le projecteur sont respectivement :

$$\langle \Omega \mid \Omega' \rangle = \cos(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta'}{2}) \exp\left[\frac{i}{2}(\varphi - \varphi^{'})\right] + \sin(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\theta'}{2}) \exp\left[-\frac{i}{2}(\varphi - \varphi^{'})\right] \ , \tag{2.10}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int d\cos(\theta) d\varphi \left|\Omega\right\rangle \left\langle\Omega\right| = I \ . \tag{2.11}$$

avec $S_z = \frac{1}{2}\sigma_z$ et $S_y = \frac{1}{2}\sigma_y$, ou sont les matrices de pauli.

Nous designe par z la variable réelle qui décrit la position de l'atome , avec le projecteur correspondant :

$$\int dz \left|z\right\rangle \left\langle z\right| = 1 \ , \tag{2.12}$$

et (θ, φ) les variables polaires générer la dynamique du spin .

Pour la déscription du système, nous allons considérer l'état quantique $|\theta, \varphi \ ; \ z\rangle$ reliant le mouvement extérieur et intérieur de l'atome qu'on peut séparer en produit direct. Le mouvement extérieur est décrit par la variable réelle z tandis que les variables angulaire (θ, φ) décrivent la dynamique du spin . L'amplitude de transition de l'état initial $|\theta_i \ , \ \varphi_i \ ; \ z_i\rangle$ à $t_i = 0$ à l'état final $\left|z_f \ ; \ \theta_f \ , \varphi_f\right\rangle$ à $t_f = T$ est définie par les éléments de la matrice de l'opérateur d'évolution comme suit :

$$K\left(z_f \ , \theta_f \ , \varphi_f \ , z_i \ , \theta_i \ , \varphi_i \ ; T\right) = \langle \theta_f \ , \varphi_f \ , z_f \mid U\left(T, 0\right) \mid \theta_i \ , \varphi_i \ , z_i \rangle \ , \tag{2.13}$$

avec

$$U\left(T \ , \ 0\right) = T_D \exp(-\frac{i}{\hbar} \int_0^T H dt) \ , \tag{2.14}$$

où T_D est l'opérateur chronologique Dyson .

pour passer à la représentation les intégrales de chemin , d'abord l'intervalle de temps $[0\ ,T]$ en $N+1$ intervalles de longeurs ε , pour lesquels N instants intermédiaires se répartissant réguliérement entre 0 et T . C'est-à-dire $T=(N+1)\,\varepsilon$.

Utilisons d'abord la formule de Trotter :

$$U\left(T\ ,\ 0\right)=\lim_{N\rightarrow+\infty}\left[e^{-\frac{i\ \varepsilon H_{0}}{\hbar}}e^{-\frac{i\ \varepsilon H_{int}}{\hbar}}\right]^{N+1}=\lim_{N\rightarrow+\infty}\prod_{n=1}^{n=N+1}U\left(t_{n}\ ,t_{n+1}\right)\ . \tag{2.15}$$

Introduisant les relations de fermeture entre chaque paire de $U\left(\varepsilon\right)$:

$$\begin{aligned}K\left(f\ ,i\ \ ;T\right)=&\lim_{N\rightarrow+\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N}dz_{n}\frac{1}{2\pi}\int\prod_{n=1}^{n=N}\frac{d\cos(\theta_{n})d\varphi_{n}}{2\pi}\\&\times\prod_{n=1}^{n=N+1}\left\langle\theta_{n}\ ,\varphi_{n}\ ;z_{n}\ \right|e^{-\frac{i\ \varepsilon H_{0}}{\hbar}}e^{-\frac{i\ \varepsilon H_{int}}{\hbar}}\left|\ \theta_{n-1}\ ,\varphi_{n-1}\ ;\ z_{n-1}\ \right\rangle\ ,\end{aligned} \tag{2.16}$$

aprés l'action de H_{int} sur les états $\left|z_{n}\right\rangle$, on note que :

$$\left\langle\theta_{n}\ ,\varphi_{n}\ ;z_{n}\ \right|e^{-\frac{i\ \varepsilon H_{0}}{\hbar}}e^{-\frac{i\ \varepsilon H_{int}}{\hbar}}\left|\ \theta_{n-1}\ ,\varphi_{n-1}\ ;\ z_{n-1}\ \right\rangle=\left\langle z_{n}\right|e^{-\frac{i\ \varepsilon H_{0}}{\hbar}}\left|z_{n-1}\right\rangle\left\langle\theta_{n}\ ,\varphi_{n}\ \right|e^{-\frac{i\ \varepsilon H_{int}}{\hbar}}\left|\ \theta_{n-1}\ ,\varphi_{n-1}\ \right\rangle\ , \tag{2.17}$$

et le propagateur devient :

$$\begin{aligned}K\left(f\ ,i\ \ ;T\right)=&\lim_{N\rightarrow+\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N}dz_{n}\prod_{n=1}^{n=N+1}\left\langle z_{n}\right|e^{-\frac{i\ \varepsilon H_{0}}{\hbar}}\left|z_{n-1}\right\rangle\lim_{N\rightarrow+\infty}\frac{1}{2\pi}\int\prod_{n=1}^{n=N}\frac{d\cos(\theta_{n})d\varphi_{n}}{2\pi}\\&\times\prod_{n=1}^{n=N+1}\left\langle\theta_{n}\ ,\varphi_{n}\ \right|e^{-\frac{i\ \varepsilon H_{int}}{\hbar}}\left|\ \theta_{n-1}\ ,\varphi_{n-1}\ \right\rangle\ ,\end{aligned} \tag{2.18}$$

avec

$$z_{N+1}=z_{f}\quad,\ z_{0}=z_{i}\ \ ,\ \Omega_{N+1}=\Omega_{f}\ \ ,\ \Omega_{0}=\Omega_{i}\ . \tag{2.19}$$

En tenant compte du fait que :

$$\langle z_n \left| e^{-\frac{i\,\varepsilon}{2\hbar m}p^2} \right| z_{n-1}\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\ \hbar\varepsilon}}\exp\ \left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left(z_n - z_{n-1}\right)^2\right]\quad , \tag{2.20}$$

$$\langle\Omega|\,\sigma_z\,|\Omega'\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)e^{+\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta'}{2}\left(\frac{\theta'}{2}\right)e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}\ , \tag{2.21}$$

$$\langle\Omega|\,\sigma_+\,|\Omega'\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)e^{+\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}\ , \tag{2.22}$$

$$\langle\Omega|\,\sigma_-\,|\Omega'\rangle = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}\ . \tag{2.23}$$

Le propagateur prend la forme discrete suivante :

$$\begin{aligned}
K(f\ ,i\ ;T) = \lim_{N\longrightarrow\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N}\frac{1}{2\pi}d\varphi_n d\cos(\theta_n)\lim_{N\longrightarrow\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar}\right)^{\frac{N}{2}}\int\prod_{n=1}^{n=N}dz_n\prod_{n=1}^{n=N+1}\exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar}(\Delta z_n)^2\right] \\
e^{-\frac{T\gamma_+}{4}}\left\{\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right)e^{\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})} + \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right)e^{-\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})}\right. \\
-\frac{i\varepsilon}{2}(\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2})\left[\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right)e^{\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})} - \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right)e^{-\frac{i}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})}\right] \\
+\frac{i\varepsilon\Omega}{2}\exp\left[-i(\omega_L t_n - kz_n)\right]\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right)e^{\frac{i}{2}(\varphi_n+\varphi_{n-1})} \\
\left.+\frac{i\varepsilon\Omega}{2}\exp\left[+i(\omega_L t_{n-1} - kz_{n-1})\right]\sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right)e^{-\frac{i}{2}(\varphi_n+\varphi_{n-1})}\right\}\ .
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Ayant obtenu la forme conventionnelle ,

$$K = \int Dpath\exp(iaction(path)).$$

L'étape suivante consiste à intégrer, en vue d'extraire les propriétés physiques qui nous intéressons.

Procédons alors au calcul de $K(f\ ,i\ ;T)$.

2.3 Calcul propagateur

Pour intégrer , il faut d'abord diagonaliser l'Hamiltonien. Pour cela nous éliminons les termes $\exp\left[-i\ (\omega_L t_n - kz_n)\right]$ et $\exp\left[+i\ (\omega_L t_{n-1} - kz_{n-1})\right]$ à l'aide du changement des variables polaires suivant :

$$\varphi_n = \varphi_n^{'} + (\omega_l t_n - kz_n)\ , \tag{2.25}$$

Il est clair que la mesure reste inchangé

$$\prod_{n=1}^{n=N} \frac{d\cos(\theta_n)d\varphi_n}{2\pi} = \prod_{n=1}^{n=N} \frac{d\cos(\theta_n)d\varphi_n^{'}}{2\pi}\ . \tag{2.26}$$

et le propagateur (2.22) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
K(f\ ,\ i\ ;T) = e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \lim_{N\longrightarrow\infty} \int \prod_{n=1}^{n=N} \frac{1}{2\pi} d\varphi_n' d\cos(\theta_n) \lim_{N\longrightarrow\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\ \varepsilon\hbar}\right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^{n=N} dz_n \prod_{n=1}^{n=N+1} \\
\times\left\{\left[1 - \frac{i\ \varepsilon}{2}\left(\Delta\omega - \frac{i\ \hbar\gamma_-}{2}\right)\right] \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) e^{\frac{i}{2}(\varphi_n' - \varphi_{n-1}')} \exp\left[\frac{i}{2}\left(\frac{m}{\varepsilon\hbar}(\Delta z_n)^2 - k\Delta z_n\right)\right]\right. \\
+\left[1 + \frac{i\ \varepsilon}{2}\left(\Delta\omega - \frac{i\ \hbar\gamma_-}{2}\right)\right] \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) e^{-\frac{i}{2}(\varphi_n' - \varphi_{n-1}')} \exp\left[\frac{i}{2}\left(\frac{m}{\varepsilon\hbar}(\Delta z_n)^2 + k\Delta z_n\right)\right] \\
+\frac{i\ \varepsilon\Omega}{2} \exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2\right] \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) e^{\frac{i}{2}(\varphi_n' + \varphi_{n-1}')} \\
\left. + \frac{i\ \varepsilon\Omega}{2} \exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2\right] \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) e^{-\frac{i}{2}(\varphi_n' + \varphi_{n-1}')}\right\}\ .
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Avec

$$\omega - \omega_L = \Delta\omega\ , \tag{2.28}$$

on tenant compte du fait que :

$$\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2 \pm \frac{ik}{2}\Delta z_n = \frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left[(\Delta z_n \pm \frac{\hbar k\varepsilon}{2m})^2 - \frac{\hbar^2\varepsilon^2 k^2}{4m^2}\right] \ , \tag{2.29}$$

alors le propagateur (2.25) devient :

$$K(f\ ,\ i\ ;T) = e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \lim_{N\longrightarrow\infty} \int \prod_{n=1}^{n=N} \frac{1}{2\pi} d\varphi_n d\cos(\theta_n) \lim_{N\longrightarrow\infty} (\frac{m}{2\pi i\ \varepsilon\hbar})^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^{n=N} dz_n \prod_{n=1}^{n=N+1} e^{-\frac{i\hbar\varepsilon k^2}{8m}}$$

$$\Bigg\{\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right)\exp + \frac{i}{2}(\varphi'_n - \varphi'_{n-1})\left[1 - \frac{i\ \varepsilon}{2}\left(\Delta\omega - \frac{i\ \hbar\gamma_-}{2}\right)\right]\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left[(\Delta z_n - \frac{\hbar k\varepsilon}{2m})^2\right]\right]$$

$$+\sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) e^{-\frac{i}{2}(\varphi'_n - \varphi'_{n-1})}\left[1 - \frac{i\varepsilon}{2}\left(\Delta\omega - \frac{i\ \hbar\gamma_-}{2}\right)\right]\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left[(\Delta z_n + \frac{\hbar k\varepsilon}{2m})^2\right]\right]$$

$$+\frac{i\ \varepsilon\Omega}{2}\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2\right]\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) e^{\frac{i}{2}(\varphi'_n + \varphi'_{n-1})}$$

$$+\ \frac{i\ \varepsilon\Omega}{2}\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2\right]\sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_{n-1}}{2}\right) e^{-\frac{i}{2}(\varphi'_n + \varphi'_{n-1})}\Bigg\} \ , \tag{2.30}$$

on peut écrire le propagateur sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} K(f,i\ ;T) \ &= \ e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \lim_{N\mapsto\infty} (\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon})^{\frac{N}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{n=1}^{n=N} dz_n \exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left(z_n - z_{n-1}\right)\right] \\ \times \prod_{n=1}^{n=N+1} e^{-\frac{i\ \hbar\ \varepsilon\ k^2}{8m}} \quad & \lim_{N\mapsto\infty} \int \prod_{n=1}^{n=N} \frac{d\cos(\theta_n) d\varphi'_n}{2\pi} \times \prod_{n=1}^{n=N+1} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta_n}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi'_n} & \sin(\frac{\theta_n}{2})e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n} \end{pmatrix} \\ & R(z_n\ ;\ t_n) \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta_{n-1}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}} \\ \sin(\frac{\theta_{n-1}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}} \end{pmatrix} \quad , \end{aligned} \tag{2.31}$$

où

$$R(z_n\ ;\ t_n) = \begin{pmatrix} \exp\left[-\frac{i\varepsilon}{2}\left(\Delta\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right)\right]\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left[\Delta z_n - \frac{\hbar k\varepsilon}{2m}\right]^2 & \frac{i\ \varepsilon\Omega}{2}\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2\right] \\ \frac{i\ \varepsilon\Omega}{2}\exp\left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\Delta z_n)^2\right] & \exp\left[\frac{i\varepsilon}{2}\left(\Delta\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right)\right]\exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}\left[\Delta z_n + \frac{\hbar k\varepsilon}{2m}\right]^2 \end{pmatrix} , \tag{2.32}$$

Introduisant maintenant l'identité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{-i\ \varepsilon}{2m\hbar}p_n^2 + \frac{i}{\hbar}P_n\left(\Delta z_n \pm \frac{\varepsilon\hbar}{2m}k\right)\right] = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\ \varepsilon\hbar}} \exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar}\left(\Delta z_n \pm \frac{\varepsilon\hbar}{2m}k\right)^2\right], \tag{2.33}$$

Le propagateur prend la forme suivante :

$$K(f\ ,\ i\ \ ;T) = e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \lim_{N\mapsto\infty} \int \prod_{n=1}^{n=N} dz_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\sum\left[\frac{-i\ \varepsilon}{2m\hbar}p_n^2 + \frac{i}{\hbar}P_n\Delta z_n - \frac{\varepsilon\hbar}{2m}k^2\right]$$

$$\prod_{n=1}^{n=N+1}\begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta_n}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_n^{'}} & \sin(\frac{\theta f}{2})e^{-\frac{i}{2}\varphi_f^{'}} \end{pmatrix} R_2(z_n\ ;\ t_n) \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta_{n-1}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}^{'}} \\ \sin(\frac{\theta_{n-1}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}^{'}} \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

où

$$R_2(z_n\ ;\ t_n) = \begin{pmatrix} 1 - i\ \varepsilon\left(\frac{1}{2}\left(\Delta\omega - \frac{i\ \hbar\gamma_-}{2}\right) + \frac{P_n k}{2m}\right) & \frac{i\varepsilon\Omega}{2} \\ \frac{i\varepsilon\Omega}{2} & 1 + i\ \varepsilon\left(\frac{1}{2}\left(\Delta\omega - \frac{i\ \hbar\gamma_-}{2}\right) + \frac{P_n k}{2m}\right) \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

Intégrant sur les N variables de z_n . La présence de la distribution de Dirac dans (2.34) reflète la conservation de l'impulsion de l'atome durant le mouvement i . e :

$$p_1 = p_2 = ... = p_{N+1} = p\ .$$

Le propagateur prend la forme suivante :

$$K(f\ ,\ i\ ;T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \exp\left[(-\frac{iT}{2m\hbar}p^2) + \frac{i}{\hbar}p(z_f - z_0)\right] \times \exp\left(-\frac{i\ \hbar T k^2}{8m}\right)$$

$$e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \lim_{N\mapsto\infty} \int \prod_{n=1}^{n=N} \frac{d\cos(\theta_n)d\varphi_n^{'}}{2\pi}$$

$$\prod_{n=1}^{n=N+1} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta_n}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi'_n} & \sin(\frac{\theta_n}{2})e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n} \end{pmatrix} R_2(p\ ; t_n) \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta_{n-1}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}} \\ \sin(\frac{\theta_{n-1}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}} \end{pmatrix} , \tag{2.36}$$

où

$$R_2(p\ ; t_n) == \begin{pmatrix} 1 - i\ \varepsilon \left(\frac{1}{2}\left(\Delta\omega - \frac{i\ \hbar\gamma_-}{2}\right) + \frac{Pk}{2m}\right) & \frac{i\varepsilon\Omega}{2} \\ \frac{i\varepsilon\Omega}{2} & \left(1 + \frac{i\ \varepsilon}{2}\left(\Delta\omega - \frac{i\ \hbar\gamma_-}{2}\right) + \frac{P\ k}{2m}\right) \end{pmatrix} . \tag{2.37}$$

A ce stade, notons que l'intégration plus de θ_n et φ'_n peut être fait par deux méthodes .

2.4 Première Méthode :

Le premier, ce qui a étudié dans les travaux précédents [21] , où nous avons effectué l' intégration au-dessus des variables angulaires comme série de perturbation . Pour ceci , nous intégrons sur les variables angulaires θ_n et φ'_n , ainsi le propagateur prend la forme suivante :

$$K(f; i, T) = e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{-i\varepsilon}{2m\hbar}p^2 + \frac{i}{\hbar}P(z_f - z_0) - i\frac{T\hbar}{8m}k^2\right]$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta_f}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi'_f} & \sin(\frac{\theta_f}{2})e^{-\frac{i}{2}\varphi'_f} \end{pmatrix} R(p\ ; T) \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta_i}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi'_i} \\ \sin(\frac{\theta_i}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi'_i} \end{pmatrix} , \tag{2.38}$$

avec

$$R(p\ ; T) = \lim_{N\mapsto\infty} (-1)^N \prod_{\underleftarrow{n=1}}^{n=N+1} R_2(p\ ; t_n) . \tag{2.39}$$

Maintenant passons au calcul du produit des matrice suivant L. Chetouani et al [6] :

$$R(p\ ;\ t_n) = e^{-i\varepsilon\omega(n)\sigma_z} + i\varepsilon k(n) \tag{2.40}$$

$$
\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{N}(e^{-i\varepsilon\omega(n)\sigma_z}+i\varepsilon K(n)) &= e^{-i\sum\limits_{j=1}^{N}\varepsilon\omega(j)\sigma_z}+\sum_{l=1}^{N}(i\varepsilon)e^{-i\sum\limits_{l+1}^{N}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l)e^{-i\sum\limits_{1}^{l-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z} \\
&+\sum_{l_1=1}^{N}\sum_{l_2=1}^{l_1-1}(i\varepsilon)^2 e^{-i\sum\limits_{l_1+1}^{N}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_1)e^{-i\sum\limits_{l_2+1}^{l_1-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_2) \\
&e^{-i\sum\limits_{1}^{l_1-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}+...+\sum_{l_1=1}^{N}\sum_{l_2=1}^{l_1-1}\sum_{l_3=1}^{l_2-1}...\sum_{l_{N-1}=1}^{l_{N-2}-1}\sum_{l_N=1}^{l_{N-1}-1}(i\varepsilon)^N e^{-i\sum\limits_{l_1+1}^{N}\varepsilon\omega(k)\sigma_z} \\
&K(l_1)e^{-i\sum\limits_{l_2+1}^{l_1-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_2)e^{-i\sum\limits_{l_3+1}^{l_2-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z} \\
&K(l_3)...e^{-i\sum\limits_{l_{N-1}+1}^{l_{N-2}-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z} \\
&K(l_{N-1})e^{-i\sum\limits_{l_N+1}^{l_{N-1}-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_N)e^{-i\sum\limits_{1}^{l_N-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z} \quad , \qquad (2.41)
\end{aligned}
$$

où $k(n)$ c'est une matrice antidiagonal donnée par :

$$
k(n)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\Omega}{2} \\ \frac{\Omega}{2} & 0 \end{pmatrix} , \qquad (2.42)
$$

et

$$
\omega(n)=\frac{1}{2}\left(\Delta\omega-\frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right)+\frac{kp}{2m}, \qquad u(n)=\frac{\Omega}{2}. \qquad (2.43)
$$

A la limite $N\longrightarrow+\infty$: le produit devient :

$$
\begin{aligned}
R(p\ ,T) &= e^{-i\int_0^T ds\omega(p,s)\sigma_z}+i\int_0^T ds_1 e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_1)e^{-i\int_0^{s_1} ds\omega(p,s)\sigma_z} \\
&+(i)^2\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2 e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_1)e^{-i\int_{s_2}^{s_1} ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_2)e^{-i\int_0^{s_2} ds\omega(p,s)\sigma_z} \\
&+...(i)^N\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\int_0^{s_2} ds_3...\int_0^{s_{N-1}} ds_N e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_1)e^{-i\int_{s_2}^{s_1} ds\omega(p,s)\sigma_z} \\
&K(s_2)e^{-i\int_{s_3}^{s_2} ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_3)...K(s_{N-1}) \\
&e^{-i\int_{s_N}^{s_{N-1}} ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_N)e^{-i\int_0^{s_N} ds\omega(p,s)\sigma_z}+...\ . \qquad (2.44)
\end{aligned}
$$

Un calcul simple nous montre que les termes impaires respectivemet paires sont les élément diagonaux respectivement antidiagonaux de $R(p\ ,\ T)$:

$$R_{11}(p\ ,T) = e^{-i\int_0^T ds\omega(p,s)} + \sum_{n=1}^{\infty} i^{2n} \int_0^T ds_1 \int_0^{S_1} ds_2 \int_0^{S_2} ds_3 ... \int_0^{S_{N-1}} ds_{2n}$$

$$\times e^{-i\int_{S_1}^T ds\omega(p,s)} u\left(p(S_1), S_1\right) e^{+i\int_{S_2}^{S_1} ds\omega(p,s)} u\left(p(S_2), S_2\right)$$

$$\times ... e^{+i\int_{S_{2n}}^{S_{2n-1}} ds\omega(p,s)} u\left(p(S_{2n}), S_{2n}\right) e^{+i\int_0^{S_{2n}} ds\omega(p,s)}\ , \qquad (2.45)$$

et

$$R_{12}(p\ ,T) = i\int_0^T ds_1 e^{-i\int_{S_1}^T ds\omega(p,s)} u\left(p(S_1), S_1\right) R_{22}(p(s_1), s_1)\ , \qquad (2.46)$$

$$R_{22}(p\ ,T) = R_{11}^*(p\ ,T)\ , \qquad (2.47)$$

$$R_{22}(p\ ,T) = -R_{12}^*(p\ ,T)\ . \qquad (2.48)$$

Insérons les expressions $u(n) = \frac{\Omega}{2}$ et $\omega(n) = \frac{1}{2}\left(\Delta\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right) + \frac{kp}{2m}$ dans la formule (2.46) et nous avons obtenu :

$$R_{11}(p\ ,T) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i\ \Omega}{2}\right)^{2n} \int_0^T e^{i\Delta S_1} ds_1 \int_{S_1}^T e^{-i\Delta S_2} ds_2 ... \int_0^{S_{2n-1}} e^{-i\Delta S_{2n}} ds_{2n}\right] e^{-i\frac{\Delta T}{2}}\ , \qquad (2.49)$$

avec

$$\Delta = 2\omega\left(n\ ,s\right)\ . \qquad (2.50)$$

2.4.1 Sommation des séries de perturabtion :

Evaluons $R_{11}(p\ ,\ T)$ en utilisant la transformation de Laplace par rapport à T [6] . Soit :

$$R_{11}(q\ ,T) = \int_0^{+\infty} dTe^{-qT} R_{11}(p\ ,T)\ , \tag{2.51}$$

où $R_{11}(q\ ,T)$ s'écrit sous la forme :

$$R_{11}(q\ ,T) = \left[1 + \sum_{n\ =1}^{\infty} \left(\frac{i\ \Omega}{2}\right)^{2n} F(0,T)\right] e^{-i\frac{\Delta T}{2}}\quad , \tag{2.52}$$

Avec

$$F(0\ ,T) = \int_0^T e^{i\Delta S_1} ds_1 F_1(0\ ,\ s_1)\ , \tag{2.53}$$

$$F_1(0\ ,S_1) = \int_0^{S_1} e^{-i\Delta S_2} ds_2 F_2(0\ ,\ s_2)\ , \tag{2.54}$$

et on obtient par itération :

$$F_{2n-1}(0\ ,\ S_{2n-1}) = \int_0^{S_{2n-1}} e^{-i\Delta S_{2n}} ds_{2n}\ . \tag{2.55}$$

La transformation de Laplace de $F(0\ ,\ T)$ est :

$$\widetilde{F}(0\ ,\ q) = \int_0^{+\infty} e^{-qT} F(0\ ,T) dT = \int_0^{+\infty} dTe^{-qT} \int_0^T ds_1 e^{i\Delta s_1} F_1(0\ ,\ s_1) ds_1\ , \tag{2.56}$$

produit par $e^{-i\Delta T} e^{i\Delta T}$

$$\int_0^{+\infty} dTe^{-(q-i\Delta)T} \int_0^T e^{-i\Delta(T-s_1)} F_1(0\ ,s_1) ds_1\ . \tag{2.57}$$

En utilisant la théorème de convolution , on obtient :

$$G(p)F(p) = \int_0^s f(s)g(T-s)ds \ , \tag{2.58}$$

$$\widetilde{F}(0\ ,\ q) = \frac{1}{q}\widetilde{F}_1(0\ , q - i\Delta), \tag{2.59}$$

où

$$\widetilde{F}_1(0\ ,\ q - i\Delta) = \int_0^{+\infty} e^{-(q-i\Delta)T} F_1(0\ ,\ T)dT$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-(q-i\Delta)T} dT \int_0^{s_1} e^{-i\Delta s_2} ds_2 F_2(0\ ,\ s_2) = \frac{1}{q-i\Delta}\widetilde{F}_2(0\ , q)\ . \tag{2.60}$$

Effectuons le même calcul pour tous les autres termes , on obtient :

$$\widetilde{F}(0\ ,\ q) = \frac{1}{q}\left[\frac{1}{q\,(q-i\Delta)}\right]^n \ , \tag{2.61}$$

$$\widetilde{F}(0\ ,\ T) = \int_0^{+\infty} e^{qT} F(0\ , q)dq \ \ . \tag{2.62}$$

Insérons ce résultat dans $R_{11}(q\ , T)$ et effectuons la somme , on obtient :

$$R_{11}(q\ , T) = \left[1 + \int_0^{+\infty}\left[\frac{q - i\ \Delta}{q\,(q - i\ \Delta)} - \frac{1}{q}\right] e^{qT} dT\right] e^{-i\frac{\Delta T}{2}} \ . \tag{2.63}$$

Ce résultat est valable pour $\mid \frac{\left(\frac{i\ \Omega}{2}\right)^{2n}}{q(q-i\Delta)} \mid < 1$. On note qu'il est toujours possible de trouver un contour où cette condition est vérifiée .

On intégre sur q , on trouve l'expression de :

$$R_{11}(p\ ,\ T) = \cos\left(\Omega' T\right) - \frac{i\ \Delta}{2\Omega}\sin\left(\Omega' T\right) \ , \tag{2.64}$$

avec

$$\Omega' = \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Omega^2}{4}} \ . \tag{2.65}$$

Par un calcul identique , on trouve les autres éléments :

$$R_{12}(p \ , \ T) = \frac{i \ \Omega'}{2\Omega} \sin\left(\Omega' T\right) \ , \tag{2.66}$$

$$R_{21}(p \ , \ T) = \frac{i \ \Omega'}{2\Omega} \sin\left(\Omega' T\right) \ , \tag{2.67}$$

$$R_{22}(p \ , \ T) = \cos\left(\Omega' T\right) + \frac{i \ \Delta}{2\Omega} \sin\left(\Omega' T\right) \ . \tag{2.68}$$

Substitouns ce résultat dans l'equation le propagateur prend finalement la forme :

$$K(f \ , \ i \ ; T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{iTp^2}{2m \ \hbar} - \frac{i \ \hbar k^2 T}{8m} + \frac{i}{\hbar} p(z_f - z_i) \right] e^{-\frac{T\gamma_+}{4}}$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_f}{2} e^{\frac{i\varphi'_f}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2} e^{-\frac{i\varphi'_f}{2}} \end{pmatrix} R(p \ , \ T) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_i}{2} e^{-\frac{i\varphi'_i}{2}} \\ \sin\frac{\theta_i}{2} \exp(+\frac{i\varphi'_i}{2}) \end{pmatrix} \ , \tag{2.69}$$

avec

$$R(p \ , T) = \begin{pmatrix} \cos\left(\Omega' T\right) - \frac{i\Delta}{2\Omega} \sin\left(\Omega' T\right) & -\frac{i\Omega'}{2\Omega} \sin\left(\Omega' T\right) \\ -\frac{i\Omega'}{2\Omega} \sin\left(\Omega' T\right) & \cos\left(\Omega' T\right) + \frac{i\Delta}{2\Omega} \sin\left(\Omega' T\right) \end{pmatrix} \ . \tag{2.70}$$

Retournons aux anciennes variables angilaire , nous obtenons :

$$K(f \ , \ i \ ; \ T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{iT}{2m \ \hbar} P^2 - \frac{i \ \hbar T k^2}{8m} + \frac{i}{\hbar} p\left(z_f - z_0\right) \right] e^{-\frac{T\gamma_+}{4}}$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta_f}{2}) e^{+\frac{i}{2}\varphi'_f} & \sin(\frac{\theta_f}{2}) e^{-\frac{i}{2}\varphi'_f} \end{pmatrix} S(p \ , T) \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta_i}{2}) e^{+\frac{i}{2}\varphi'_i} \\ \sin(\frac{\theta_i}{2}) e^{+\frac{i}{2}\varphi'_i} \end{pmatrix} \ , \tag{2.71}$$

où les éléments de la matrice S sont donnés par :

$$S_{11}\left(p\ ,\ T\right)=\left[\cos\left(\Omega' T\right)-\frac{i\Delta}{2\Omega}\sin\left(\Omega' T\right)\right]e^{-\frac{T\gamma_{+}}{4}}\exp\left[\frac{i}{2}\left(kz_{f}-\omega_{l}T-kz_{i}\right)\right]\ , \tag{2.72}$$

$$S_{22}\left(p\ ,\ T\right)=\left[\cos\left(\Omega' T\right)+\frac{i\ \Delta}{2\Omega}\sin\left(\Omega' T\right)\right]e^{-\frac{T\gamma_{+}}{4}}\exp\left[\frac{i}{2}\left(kz_{f}-\omega_{l}T-kz_{i}\right)\right]\ , \tag{2.73}$$

$$S_{12}\left(p\ ,\ T\right)=-\frac{i\ \Omega'}{2\Omega}\sin\left(\Omega' T\right)e^{-\frac{T\gamma_{+}}{4}}\exp\left[\frac{i}{2}\left(kz_{f}-\omega_{l}T-kz_{i}\right)\right]\ , \tag{2.74}$$

$$S_{21}\left(p\ ,\ T\right)=-\frac{i\ \Omega'}{2\Omega}\sin\left(\Omega' T\right)e^{-\frac{T\gamma_{+}}{4}}\exp\left[\frac{i}{2}\left(kz_{f}-\omega_{l}T-kz_{i}\right)\right]\ . \tag{2.75}$$

Les angles (θ,φ) sont autorisés à ne varient que dans les domaines limités $[0,2\pi]$ et $[0,4\pi]$ respectivement . Donc le propagateur devient (somme sur tous les chemins possibles) :

$$\begin{aligned} K(f\ ,\ i\ ;\ T) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K\left(z_f\ ,\theta_f+2n\ \pi\ ,\ z_i\ ,\ \varphi_f+4n\ \pi\ ,\theta_i\ ,\varphi_i\ ;T\right) \\ &= K(z_f\ ,\Omega_f\ ,z_i\ ,\Omega_i\ ;T)\ , \end{aligned} \tag{2.76}$$

qui est une expression pour le propagateur dans l'espace des états cohérents angulaire .

2.5 Deuxième Méthode :

Dans cette deuxième méthode , nous voudrions appliquer la méthode dans la quelle nous présenterons la transformation afin de simplifier la forme de la matrice $R_2(p\ ,\ t_n)$. Pour ce but , nous allons d'abord prendre le décalage suivant :

$$p\rightarrow p+\frac{\hbar k}{2}\ , \tag{2.77}$$

le propagateur prend la forme proportionnée :

$$K(z_f\ ,\Omega_f^{'}\ ,\ z_i\ ,\ \Omega_i^{'}\ ;T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p+\frac{\hbar k}{2}\right)(z_f - z_i) - \frac{iTp^2}{2m\hbar} - i\frac{\Delta e_p}{2\hbar}T\right] e^{-\frac{T\nu_+}{4}}$$

$$\times \lim_{N\mapsto\infty} \int \prod_{n\ =1}^{n\ =N} \frac{d\cos(\theta_n)d\varphi_n^{'}}{2\pi} \prod_{n=1}^{n=N+1} \times \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta_n}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_n^{'}} & \sin(\frac{\theta_n}{2})e^{-\frac{i}{2}\varphi_n^{'}} \end{pmatrix}$$
$$\times R_3(p\ ,\ t_n) \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta_{n-1}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}^{'}} \\ \sin(\frac{\theta_{n-1}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}^{'}} \end{pmatrix}, \tag{2.78}$$

où

$$R_3(p\ ,\ t_n) = 1 - i\ \varepsilon \left[\left[\frac{1}{2}\left(\Delta\omega - \frac{i\ \hbar\gamma_-}{2}\right) + \frac{\Delta e_p}{2\hbar}\right]\sigma_z - \frac{\Omega}{2}\sigma_x\right]\ , \tag{2.79}$$

et

$$\Delta e_p = \frac{(p+\hbar k)^2}{2m} - \frac{p^2}{2m}\ \ , \tag{2.80}$$

alors nous présentons de nouvelles variables angulaires par l'intermédiaire d'une transformation unitaire définie par :

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta_n}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_n^{'}} \\ \sin(\frac{\theta_n}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_n^{'}} \end{pmatrix} = e^{i\frac{\alpha}{2}\sigma_y} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta_n^{'}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_n^{''}} \\ \sin(\frac{\theta_n^{'}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_n^{''}} \end{pmatrix}\ . \tag{2.81}$$

Le rôle de cette transformation unitaire est de diagonaliser la matrice $R_3(p\ ,\ t_n)$.

où

$$\sin(\alpha) = \frac{\hbar\Omega}{\sqrt{(\hbar\Omega)^2 + (\hbar\Delta\omega - \frac{i\ \hbar\gamma_-}{2} + \frac{\Delta e_p}{2\hbar})^2}}\ , \tag{2.82}$$

puis la prise du propagateur à la forme suivante :

$$K(z_f\ ,\Omega_f^{'}\ ,z_i\ ,\Omega_i^{'}\ ;T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p+\frac{\hbar k}{2}\right)(z_f-z_i)-\frac{iTp^2}{2m\hbar}-i\frac{\Delta e_p}{2\hbar}T\right]e^{-\frac{T\nu_+}{4}}$$

$$\lim_{N\mapsto\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N}\frac{d\cos(\theta_n^{'})d\varphi_n^{''}}{2\pi}\prod_{n=1}^{n=N+1}\times\begin{pmatrix}\cos(\frac{\theta_n^{'}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_n^{''}} & \sin(\frac{\theta_n^{'}}{2})e^{-\frac{i}{2}\varphi_n^{''}}\end{pmatrix}R_4(p\ ,\ t_n)\begin{pmatrix}\cos(\frac{\theta_n^{'}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_n^{''}}\\ \sin(\frac{\theta_n^{'}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_n^{''}}\end{pmatrix}\ , \tag{2.83}$$

où

$$R_4(p\ ,T)=e^{-i\varepsilon\frac{1}{2\hbar}\sqrt{(\hbar\Omega)^2+(\hbar\Delta\omega-\frac{i\hbar\gamma_-}{2}+\frac{\Delta e_p}{2\hbar})^2\sigma_z}}\ . \tag{2.84}$$

Maintenant il convient de présenter la transformation suivante dans l'espace cohérent de spin :

$$\begin{pmatrix}\cos(\frac{\theta_n^{'}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_n^{''}}\\ \sin(\frac{\theta_n^{'}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_n^{''}}\end{pmatrix}=e^{-i\varepsilon\frac{1}{2\hbar}\sqrt{(\hbar\Omega)^2+(\hbar\Delta\omega-\frac{i\hbar\gamma_-}{2}+\frac{\Delta e_p}{2\hbar})^2\sigma_z}}\begin{pmatrix}\cos(\frac{\theta_n^{''}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_n^{'''}}\\ \sin(\frac{\theta_n^{''}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_n^{'''}}\end{pmatrix}\ , \tag{2.85}$$

puis la prise de propagateur prend la forme de :

$$K(z_f\ ,\ \Omega_f^{'}\ ,\ z_i\ ,\ \Omega_i^{'}\ ;\ T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p+\frac{\hbar k}{2}\right)(z_f-z_i)-\frac{iTp^2}{2m\hbar}-i\frac{\Delta e_p}{2\hbar}T\right]e^{-\frac{T\nu_+}{4}}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{N\mapsto\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N}\frac{d\cos(\theta_n^{''})d\varphi_n^{'''}}{2\pi}\prod_{n=1}^{n=N+1}\\ &\times\begin{pmatrix}\cos(\frac{\theta_n^{''}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_n^{'''}} & \sin(\frac{\theta_n^{''}}{2})e^{-\frac{i}{2}\varphi_n^{'''}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\frac{\theta_n^{''}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_n^{'''}}\\ \sin(\frac{\theta_n^{''}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_n^{'''}}\end{pmatrix}\ ,\end{aligned} \tag{2.86}$$

ce qui est simplement :

$$K(Z_f\ ,\Omega_f^{'}\ ,\ Z_i\ ,\ \Omega_i^{'}\ ;\ T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p+\frac{\hbar k}{2}\right)(z_f-z_i)-\frac{iTp^2}{2m\hbar}-i\frac{\Delta e_p}{2\hbar}T\right]e^{-\frac{T\nu_+}{4}}$$

$$\begin{pmatrix}\cos(\frac{\theta_f^{''}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_f^{'''}} & \sin(\frac{\theta_f^{''}}{2})e^{-\frac{i}{2}\varphi_f^{'''}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\frac{\theta_f^{''}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_f^{'''}}\\ \sin(\frac{\theta_f^{''}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_f^{'''}}\end{pmatrix}\quad . \tag{2.87}$$

Maintenant nous revenons aux vieilles variables angulaires (θ,φ) . Ainsi , l'expression exacte du propagateur concernant notre problème est la suivante :

$$K\left(Z_f,Z_i;T\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p+\frac{\hbar k}{2}\right)(z_f-z_i)-\frac{iTp^2}{2m\hbar}-i\frac{\Delta e_p}{2\hbar}T\right]e^{-\frac{T\nu_+}{4}}$$

$$\begin{pmatrix}\cos(\frac{\theta_f}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_f} & \sin(\frac{\theta_f}{2})e^{-\frac{i}{2}\varphi_f}\end{pmatrix}S(p,T)\begin{pmatrix}\cos(\frac{\theta_i}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_i}\\ \sin(\frac{\theta_i}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_i}\end{pmatrix}\quad . \tag{2.88}$$

où les éléments de la matrice $S(p,T)$ sont donnés par (2.72) -(2.75) .

2.6 La fonction d'onde :

Calculons d'abord l'amplutide de transition entre les états propres de spin, on prend comme éxemple le calcul de l'élement de matrice $K_{\uparrow\uparrow}\left(z_f,z_i;T\right)$ où

$$K_{\uparrow\uparrow}=\left|\uparrow\right\rangle K\left(z_f,z_i;T\right)\left|\uparrow\right\rangle\ . \tag{2.89}$$

Introduisons ici les relations de fermetures suivantes :

$$\int\frac{1}{2\pi}d\varphi_f d\cos(\theta_f)\left|\Omega_f\right\rangle\left\langle\Omega_f\right|=1\ ,\quad\int\ \frac{1}{2\pi}d\varphi_i d\cos(\theta_i)\left|\Omega_i\right\rangle\Omega_i\ |=1\ , \tag{2.90}$$

$$K_{11}\left(z_f,z_i,T\right)=\int\frac{1}{2\pi}d\varphi_f d\cos(\theta_f)\frac{1}{2\pi}d\varphi_i d\cos(\theta_i) <\uparrow\left|\Omega_f\right\rangle \left\langle\Omega_f\right| K(f,i;T)\left|\Omega_i\right\rangle\left\langle\Omega_i\right|\uparrow\rangle \ , \tag{2.91}$$

avec

$$<\uparrow\left|\Omega_f\right\rangle=\cos\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_f} \quad , \qquad \text{et} \qquad \left\langle\Omega_i\right|\uparrow>=\cos\frac{\theta_i}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_i} \quad . \tag{2.92}$$

Substitution(2.92) dans (2.91) et intégrer sur les coordonnées polaires , (2.91) prend la forme suivante :

$$K_{11}(f,i,T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\ \hbar}-\frac{i\ \hbar k^2T}{8m}+\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)\right]e^{-\frac{T\gamma_+}{4}}\mathbf{S}_{11}(p,T)\ , \tag{2.93}$$

De même on trouve pour les autres éléments des formules analogues :

$$K_{12}(f,i,T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\ \hbar}-\frac{i\ \hbar k^2T}{8m}+\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)\right]e^{-\frac{T\gamma_+}{4}}\mathbf{S}_{12}(p,T)\ , \tag{2.94}$$

$$K_{21}(f\ ,\ i\ ,T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\ \hbar}-\frac{i\ \hbar k^2T}{8m}+\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)\right]e^{-\frac{T\gamma_+}{4}}\mathbf{S}_{21}(p\ ,T)\ , \tag{2.95}$$

$$K_{22}(f\ ,\ i\ ,T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\ \hbar}-\frac{i\ \hbar k^2T}{8m}+\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)\right]e^{-\frac{T\gamma_+}{4}}\mathbf{S}_{22}(p,T)\ . \tag{2.96}$$

Le résultat se met sous la forme matricielle suivante :

$$K(f\ ,\ i\ ;T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\ \hbar}-\frac{i\ \hbar k^2T}{8m}+\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)\right]e^{-\frac{T\gamma_+}{4}}\mathbf{S}(p\ ,T)\ . \tag{2.97}$$

Ce qui coincident avec ceux obtenus [10] en utilisons l'intégrale de chemin des états cohérent fermionique

.

Déduisons la fonction d'onde à l'instant T à partir de l'état initial par l'intermédiaire de l'équation d'évolution :

$$\Psi(z\ ,T)=T\begin{pmatrix}\Psi_1(z,T)\\ \Psi_2(z,T)\end{pmatrix}=\int K\left(z_f\ ,\ z_i\ ;T\right)\Psi(z_i\ ,0)dz_i\ , \tag{2.98}$$

avec

$$\Psi(z_i\ ,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int e^{\frac{ipz_i}{\hbar}}\delta(p-p_0)dz_i \quad , \tag{2.99}$$

$$\Psi(z_i\ ,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{ipz_i}{\hbar}} \quad , \tag{2.100}$$

$$\Psi(z_f\ ,T) = \int\int \frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{iT}{2m\hbar}P^2 - \frac{i\hbar Tk^2}{8m} + \frac{i}{\hbar}p\left(z_f - z_0\right)\right]e^{-\frac{T\nu_+}{4}} \tag{2.101}$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ & \\ K_{21} & K_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{\frac{iP_0Z_i}{\hbar}}\end{pmatrix}dz_i \ , \tag{2.102}$$

par un calcul simple on trouve :

$$\begin{aligned}\Psi_1(z\ ,T) \quad &= \quad \frac{\Omega}{4\sqrt{2\pi\hbar}\beta(p_0)}(-\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p_0+\hbar k\right)z - E_1^+(p_0)T\right] \\ &\qquad \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p_0+\hbar k\right)z - E_1^-(p_0)T\right]) \ ,\end{aligned} \tag{2.103}$$

et

$$\Psi_2(z\ ,T) = \left\{\frac{\beta(p_0)+\varepsilon(p_0)}{2\beta(p_0)}\exp\left[\frac{i}{\hbar}p_0z - E_1^+(p_0)T\right] - \frac{-\beta(p_0)+\varepsilon(p_0)}{2\beta(p_0)}\exp\left[\frac{i}{\hbar}p_0z - E_1^-(p_0)T\right]\right\} \ , \tag{2.104}$$

avec

$$\varepsilon(p_0) = -\frac{(\frac{E_-}{\hbar} + \Delta\omega - \frac{i\gamma_-}{2})}{2} \ ,\omega_1^{\pm}(p) = \alpha_1(p) \pm \beta(p) \quad , \tag{2.105}$$

$$\omega_2^{\pm}(p) = \alpha_2(p) \pm \beta(p) \ , \tag{2.106}$$

$$E_1^{\pm} = \hbar\omega_1^{\pm}(p), E_2^{\pm} = \hbar\omega_2^{\pm}(p) \ , \tag{2.107}$$

$$\alpha_1(p) = \alpha_2(p) + \omega_l = \frac{(\frac{E_-}{\hbar} + \omega_l - \frac{i\gamma_-}{2})}{2} \ , \tag{2.108}$$

$$E_{\pm} = \frac{(p+\hbar k)^2}{2m} \pm \frac{p^2}{2m}, \beta(p) = \sqrt{\varepsilon^2(p) + \frac{\Omega^2}{4}}\ . \tag{2.109}$$

Les mêmes caractéristiques physiques peuvent ainsi être obtenus comme il a été fait dans [22] et dans le cas avec hors d'amortissement [23] .

Chapitre 3

Le modéle de Jaynes cummings pseudo-hermitique en présence de l'effet de Kerr non linéaire :

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier par l'approche intégrale de chemins, le modéle de Jaynes cummings pseudo-hermitique [12] en présence de l'effet de Kerr nonlinéaire.

Le calcul des fonctions d'ondes et les energies ainsi que l'inversion de population nécessite la connaissance du propagateur $K(f, i; T)$ que nous proposons de déterminer par l'approche intégrale de chemin en utilisant le formalisme des états cohérents : l'une par rapport au spin et l'autre relative à la l'operateur de création et d'annihilation associés au champ électromagnétique. Nous proposons dans ce chapitre de considérer par l'approche path integral l'Hamiltonian suivant [12] :

$$H_{JC} = H_0 + H_1 \, , \tag{3.1}$$

avec

$$H_0 = \omega a^+ a + \chi a^{+^2} a^2 \ , \tag{3.2}$$

et

$$H_1 = \frac{\varepsilon}{2}\sigma_z + \rho \left[a\sigma_+ - a^+\sigma_- \right] \ , \tag{3.3}$$

avec

- $\widehat{a}^\dagger, \widehat{a}$ sont respectivement les opérateurs de création et d'annihilation du champ de la cavité .
- λ est la constante de couplage entre l'atome et le champ .
- ω est la fréquence du champ .
- ε est la fréquence de transition entre l'état excité et l'état fondamental de l'atome .
- $\widehat{\sigma}_+$, $\widehat{\sigma}_-$, $\widehat{\sigma}_z$ sont les matrices de Pauli habituelles .
- et χ est la partie dispersive non linéaire du 3^{eme} ordre de l'effet de Kerr [12] .

Notons que ce Hamiltonian a été étudiée récemment par résolution directe de l'équation de Schrodinger [12]. Lorsque l'effet de Kerr sont absent comme dans le modèle de Jaynes-Cumming [24], qui d'écrit la dynamique d'un atome à deux niveaux en interaction avec un champ électromagnétique quantifie à un mode, le traitement par le formalisme intégrale de chemins a été éffectué par [25].

Ce modéle a été encore généralisé : atome à plusieurs niveaux et avec plusieurs photons, couplage dépendant du temps, photon médiateur remplacé par deux photons dégénérés :

3.2 Formalisme intégrale de chemin en représentation des états cohérents :

Passons maintenant à la description du système au moyen des intégrales de chemin en considérant l'état quantique $|Z\ ;\ \theta,\ \varphi\rangle$, où Z et les angles polaires $(\theta\ ;\ \varphi)$ sont les variables relatives au champ et au spin.

L'amplitude de transition de l'état initial $|Z_i\ ;\ \theta_i\ ,\varphi_i\rangle$ vers l'état final $\left|Z_f\ ;\ \theta_f\ ,\ \varphi_f\right\rangle$ à $t_f = T$ est définie par les éléments de matrice de l'opérateur d'évolution :

$$K(f\ ,i\ ;T) = \left\langle Z_f\ ;\theta_f\ ,\varphi_f\right| T_D \exp(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T H dt)\left|Z_i\ ;\ \theta_i\ ,\varphi_i\right\rangle\ , \tag{3.4}$$

où T_D est l'opérateur chronologique Dyson .

Pour passer à la représentation des integrals de chemin , d'abord l'intervalle de temps $[0, T]$ en $N+1$ intervalles de longeurs ε , instants intermédiaires , en utilisant au préalable la formule bien connue de trotter et introduisons ensuite les projecteurs suivant ces instants intermédiaires N réparties réguliérement entre 0 et T . Le propagateur prendre la forme suivante :

$$\begin{aligned} K(f;i,T) &= \lim_{N\mapsto\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{n=1}^{n=N}\frac{d^2 z_n}{\pi}\prod_{n=1}^{n=N+1}\left\langle Z_n\right| e^{-i\varepsilon H_0}\left|Z_{n-1}\right\rangle \\ &\times\lim_{N\mapsto\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N}\frac{d\cos(\theta_n)d\varphi_n}{2\pi}\prod_{n=1}^{n=N+1}\left[\left\langle\Omega_n\mid\Omega_{n-1}\right\rangle - i\varepsilon\left\langle\Omega_n\right| H_1\left|\Omega_{n-1}\right\rangle\right]\ , \end{aligned} \tag{3.5}$$

où

$$Z_{N+1} = Z_f \quad , \quad \Omega_{N+1} = \Omega_f\ , \tag{3.6}$$

et

$$Z_0 = Z_i \qquad ; \quad \Omega_0 = \Omega_i \ . \tag{3.7}$$

Il est facile de voir que les éléments de la matrice suivants ce calculent :

$$\langle\Omega|\,\sigma_z\left|\Omega'\right\rangle = \cos(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta'}{2})\exp\left[\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')\right] - \sin(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta'}{2})\exp\left[-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')\right] \ , \tag{3.8}$$

$$\langle\Omega|\,\sigma_+\left|\Omega'\right\rangle = \cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta'}{2})\exp\left[\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')\right] \ , \tag{3.9}$$

$$\langle\Omega|\,\sigma_-\left|\Omega'\right\rangle = \sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta'}{2})\exp\left[\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')\right] \ , \tag{3.10}$$

et le propagateur relatif μa notre problμeme a la forme d'une intégrale de chemin de Feynmann :

$$K(f\ ,i\ ;T) = \lim_{N\mapsto\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{n=1}^{n=N}\frac{d^2 Z_n}{\pi}\int\prod_{n=1}^{n=N}\frac{d\cos(\theta_n)d\varphi_n}{2\pi}$$

$$\exp\left\{\sum_{n=1}^{n=N+1}\left[\begin{array}{c} -Z_n^*\Delta Z_n - i\varepsilon\omega Z_n^* Z_{n-1} - i\varepsilon\chi Z_n^{*^2} Z_{n-1}^2 - \frac{1}{2}\left(\mid Z_n\mid^2 + \mid Z_{n-1}\mid^2\right) \\ +\log\left\langle\Omega_n \mid \Omega_{n-1}\right\rangle - i\varepsilon\frac{\langle\Omega_n|\ H_1\ |\Omega_{n-1}\rangle}{\langle\Omega_n|\Omega_{n-1}\rangle}\end{array}\right]\right\} . \tag{3.11}$$

Ayant obtenu la forme conventionnelle, il nous reste à l'intégrer en vue d'extraire les propriétés physiques qui nous intéresessent. Procédons alors au calcul de $K(f\ ,i\ ;T)$.

3.3 calcul propagateur :

Nous notons que (3.11) est écrit comme la forme suivante :

$$K(f\ ,i\ ;T) = \lim_{N\mapsto\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{n=1}^{n=N}\frac{d^2 Z_n}{\pi}\prod_{n=1}^{n=N+1}\left\langle Z_n\right| e^{-i\varepsilon H_0}\left|Z_{n-1}\right\rangle \lim_{N\mapsto\infty}\int\prod_{n=1}^{n=N}\frac{d\cos(\theta_n)d\varphi_n}{2\pi}$$

$$\prod_{n=1}^{n=N+1}\begin{pmatrix}\cos(\frac{\theta_n}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_n} & \sin(\frac{\theta_n}{2})e^{-\frac{i}{2}\varphi_n}\end{pmatrix}R(Z_n;t_n)\begin{pmatrix}\cos(\frac{\theta_{n-1}}{2})e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}}\\ \\ \sin(\frac{\theta_{n-1}}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}}\end{pmatrix} \tag{3.12}$$

$$R(Z_n;t_n)=\left[e^{-i\frac{\epsilon}{2}\varepsilon\sigma_z}+i\ \epsilon K\left(Z_n\ ;t_n\right)\right]\ , \tag{3.13}$$

où

$$K\left(Z_n\ ;t_n\right)=\begin{pmatrix}0 & -\rho Z_n\\ \\ \rho Z_n^* & 0\end{pmatrix}\ . \tag{3.14}$$

Intégrons sur toutes les variables angulaires (θ_n) et (φ_n)utilisant[26] :

$$\int_0^\pi d\cos\theta\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=\int_0^\pi d\cos\theta\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\ , \tag{3.15}$$

$$\int_0^{2\pi}d\varphi e^{im\varphi}=2\pi\delta_{m,0}\ \ , \tag{3.16}$$

On obtient :

$$K(f;i\ ;T)=\lim_{N\mapsto\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{n=1}^{n=N}dZ_n\prod_{n=1}^{n=N+1}\left\langle Z_n\right|e^{-i\ \varepsilon H_0}\left|Z_{n-1}\right\rangle$$

$$\begin{pmatrix}\cos(\frac{\theta_f}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_f} & \sin(\frac{\theta_f}{2})e^{-\frac{i}{2}\varphi_f}\end{pmatrix}\lim_{N\mapsto\infty}\prod_{n=1}^{n=N}\left(-1\right)^n R(Z_n\ ;t_n)\begin{pmatrix}\cos(\frac{\theta_i}{2})e^{-\frac{i}{2}\varphi_i}\\ \\ \sin(\frac{\theta_i}{2})e^{+\frac{i}{2}\varphi_i}\end{pmatrix}\ . \tag{3.17}$$

Développons le produit (de type matriciel 2×2)figurant dans l'expression (3.17) suivant [26] , nous trouvons alors une série :

$$R\left(Z,T\right)=\lim_{N\mapsto\infty}\prod_{n=1}^{n=N}\left(-1\right)^n R(Z_n\ ;t_n)$$

$$=\lim_{N\longrightarrow\infty}\left(-1\right)^{N+1}\left[e^{-i\int_0^T ds\omega\boldsymbol{\sigma}_z}+i\int_0^T ds_1 e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega\boldsymbol{\sigma}_z}K(s_1)e^{-i\int_0^{s_1}ds\omega\boldsymbol{\sigma}_z}\right.$$

$$+\left(i\right)^2\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2 e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega\boldsymbol{\sigma}_z}K(s_1)e^{-i\int_{s_2}^{s_1}ds\omega\boldsymbol{\sigma}_z}K(s_2)e^{-i\int_0^{s_2}ds\omega\boldsymbol{\sigma}_z}+\cdots+$$

$$+i^{N+1}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\cdots\int_0^{s_N} ds_{N+1}e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega\boldsymbol{\sigma}_z}K(s_1)e^{-i\int_{s_2}^{s_1} ds\omega\boldsymbol{\sigma}_z}$$

$$\times K(s_2)e^{-i\int_{s_2}^{s_3} ds\omega\boldsymbol{\sigma}_z}K(s_3)\times\cdots\times K(s_N)e^{-i\int_{s_{N+1}}^{s_N} ds\omega\boldsymbol{\sigma}_z}K(s_{N+1})+\cdots\Big]\ , \tag{3.18}$$

de type de Dyson.

Ses éléments de matrice sont respectivement les suivants :

$$\mathcal{R}_{11}(Z,T)=e^{-i\int_0^T ds\omega}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(-i\rho)^{2n}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\cdots\int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n}$$

$$\times\ e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega}Z_1e^{+i\int_{s_2}^{s_1} ds\omega}Z_2^*\times\cdots\times e^{+i\int_{s_{2n}}^{s_{2n-1}} ds\omega}Z_{2n}^*e^{-i\int_0^{s_{2n}} ds\omega}\Big]$$

$$=\mathcal{R}_{22}^*(Z,T)\ , \tag{3.19}$$

et

$$\mathcal{R}_{12}\left(Z,T\right)=-i\rho\int_0^T ds_1e^{-\frac{i}{2}\int_{s_1}^T \omega dt}Z_1\mathcal{R}_{11}^*\left(Z,s_1\right)$$

$$=-\mathcal{R}_{21}^*\left(Z,T\right)\ . \tag{3.20}$$

On peut voir alors que (3.17) est une série :

$$K^Z\left(\Omega_f,\Omega_i;T\right)=$$

$$\cos\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\Big[e^{-i\int_0^T ds\omega}+\sum_{n=1}^{\infty}(-i\rho)^{2n}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\cdots\int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n}$$

$$\times\ e^{-\frac{i}{2}\int_{s_1}^T \omega ds}Z_1e^{+\frac{i}{2}\int_{s_2}^{s_1} \omega ds}Z_2^*\times\cdots\times Z_{2n}^*\times e^{-\frac{i}{2}\int_0^{s_{2n}} \omega ds}\Big]$$

$$+\sin\frac{\theta_f}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\Big[e^{+i\int_0^T ds\omega}+\sum_{n=1}^{\infty}(-i\rho)^{2n}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\cdots\int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n}$$

$$\times\ e^{\frac{i}{2}\int_{s_1}^T \omega ds}Z_1^*e^{-\frac{i}{2}\int_{s_2}^{s_1} \omega ds}Z_2\times\cdots\times Z_{2n}e^{\frac{i}{2}\int_0^{s_{2n}} \omega ds}\Big]$$

$$-\cos\frac{\theta_f}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-i\rho)^{2n+1}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2\cdots\int_0^{s_{2n}}ds_{2n+1}\right.$$

$$\left.\times\, e^{-\frac{i}{2}\int_{s_1}^T\omega ds}Z_1e^{+\frac{i}{2}\int_{s_2}^{s_1}\omega ds}Z_2^*\times\cdots\times Z_{2n+1}e^{+\frac{i}{2}\int_0^{s_{2n+1}}\omega ds}\right]$$

$$\sin\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-i\rho)^{2n+1}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2\cdots\int_0^{s_{2n}}ds_{2n+1}\right.$$

$$\left.\times e^{\frac{i}{2}\int_{s_1}^T\omega ds}Z_1^*e^{-\frac{i}{2}\int_{s_2}^{s_1}\omega ds}Z_2^*\times\cdots\times Z_{2n+1}e^{-\frac{i}{2}\int_0^{s_{2n+1}}\omega ds}\right]\quad , \tag{3.21}$$

qui peut être rearrangé en l'exprimant (3.21) sous la forme d'une somme de 4 termes :

$$K\left(Z_f,\Omega_f,Z_i,\Omega_i;T\right)=K_{11}\left(f,i;T\right)+K_{22}\left(f,i;T\right)+K_{12}\left(f,i;T\right)+K_{21}\left(f,i;T\right)\ . \tag{3.22}$$

Le premier terme de (3.22) par exemple s'écrit :

$$K_{11}\left(f,i;T\right)=$$

$$\cos\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\left\{K_0^+\left(Z_f,Z_i;T\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-i\rho)^{2n}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2\cdots\int_0^{s_{2n-1}}ds_{2n}\right.\right.$$

$$\times\int\frac{d^2Z_1}{\pi}\int\frac{d^2Z_2}{\pi}\times\cdots\times\int\frac{d^2Z_{2n}}{\pi}K_0^+\left(Z_f,Z_1;T-s_1\right)Z_1$$

$$\left.\left.\times\, K_0^-\left(Z_1,Z_2;s_1-s_2\right)Z_2^*K_0^+\left(Z_2,Z_3;s_2-s_3\right)\times\cdots\times Z_{2n}^*K_0^+\left(Z_{2n},Z_i;s_{2n}\right)\right]\right\}\ , \tag{3.23}$$

avec :

$$K_0^{\pm}\left(Z'',Z';s''-s'\right)=\int\mathcal{D}Z^*\mathcal{D}Z\exp\left\{i\int_{s'}^{s''}dt\left[\frac{i}{2}\left(Z^*\dot{Z}-Z\dot{Z}^*\right)-\omega Z^*Z-\chi Z^{*2}Z^2\mp\frac{1}{2}\varepsilon\right]\right\}\ . \tag{3.24}$$

Il est naturel d'abord de traiter le terme $Z^{2*}Z^2$ figurant dans (3.24) comme perturbation . Pour cela développons l'exponentielle du terme perturbatif :

$$K_0^{\pm}\left(Z'',Z';s''-s'\right)=\left\{K_{00}^{\pm}\left(Z'',Z';s''-s'\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-i\chi)^n\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2\cdots\int_0^{s_{n-1}}ds_n\right.\right.$$

$$\times\int\frac{d^2Z_1}{\pi}\int\frac{d^2Z_2}{\pi}\cdots\int\frac{d^2Z_n}{\pi}K_{00}^{\pm}\left(Z'',Z_1;T-s_1\right)Z_1^{*2}Z_1^2$$

$$\left.\left.\times\ K_{00}^{\pm}\left(Z_1,Z_2;s_1-s_2\right)Z_2^{*2}Z_2^2\times\cdots\times Z_n^{*2}Z_n^2K_{00}^{\pm}\left(Z_n,Z';s_n\right)\right]\right\}\quad, \tag{3.25}$$

avec

$$K_{00}^{\pm}\left(Z'',Z';s''-s'\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(Z''^*Z'\right)^k}{k!}\exp\left(-\frac{\left|Z''\right|^2+\left|Z'\right|^2}{2}\right)\exp(-i\left(k\omega\pm\frac{1}{2}\varepsilon\right)\left(s''-s'\right))\quad. \tag{3.26}$$

Effectuons les intégration grâce à la formule :

$$\int\frac{dZ^*dZ}{\pi}Z^{*m}Z^ne^{-Z^*Z}=\delta_{nm}\sqrt{m!}\sqrt{n!}\quad. \tag{3.27}$$

Il vient alors :

$$K_0^{\pm}\left(Z'',Z';s''-s'\right)=$$

$$K_{00}^{\pm}\left(Z'',Z';s''-s'\right)\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-i\chi\left(k+2\right)\left(k+1\right)\right)^n\int_{s'}^{s''}ds_1\int_{s'}^{s_1}ds_2\cdots\int_{s'}^{s_{n-1}}ds_n\right]\quad. \tag{3.28}$$

Comme :

$$\exp\left(-i\chi\left(k+2\right)\left(k+1\right)\left(s''-s'\right)\right)=\exp\left[-i\chi\left(k+2\right)\left(k+1\right)\int_{s'}^{s''}ds\right]$$

$$=1+\left[-i\chi\left(k+2\right)\left(k+1\right)\right]\int_{s'}^{s''}ds_1+\left[-i\chi\left(k+2\right)\left(k+1\right)\right]^2\int_{s'}^{s''}ds_1\int_{s'}^{s''}ds_1+\cdots+$$

$$+ \left(-i\chi\left(k+2\right)\left(k+1\right)\right)^n \int_{s'}^{s''} ds_1 \int_{s'}^{s_1} ds_2 \cdots \int_{s'}^{s_{n-1}} ds_n + \cdots \quad , \tag{3.29}$$

d'où

$$K_0^{\pm}\left(Z'', Z'; s''-s'\right) = K_{00}^{\pm}\left(Z'', Z'; s''-s'\right) \exp\left(-i\chi\left(k+2\right)\left(k+1\right)\left(s''-s'\right)\right) \quad . \tag{3.30}$$

Reportons (3.30)dans (3.26) :

$$K_0^{\pm}\left(Z'', Z'; s''-s'\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(Z''^{*}Z'\right)^k}{k!} \exp\left(-\frac{\left|Z''\right|^2 + \left|Z'\right|^2}{2}\right)$$

$$\times \exp\left(-i\left[\chi\left(k+2\right)\left(k+1\right) + k\omega \pm \frac{1}{2}\varepsilon\right]\left(s''-s'\right)\right) \quad , \tag{3.31}$$

et utilisons la formule (3.27) pour simplifier encore les calcules .

Alors (3.23) devient :

$$K_{11}\left(f, i; T\right) = \cos\frac{\theta_f}{2} \cos\frac{\theta_i}{2} e^{\frac{i}{2}\left(\varphi_f - \varphi_i\right)} \exp\left(-\frac{\left|Z_f\right|^2 + \left|Z_i\right|^2}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{Z_f^{*k} Z_i^k}{k!}\right.$$

$$\times \exp\left(-i\left[\chi\left(k^2+3k+2\right) + k\omega + \frac{1}{2}\varepsilon\right]T\right)$$

$$\left.\times \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\varpi_{01}^2\right]^n \int_0^T ds_1 e^{i\Delta_1 s_1} \int_0^{s_1} ds_2 e^{-i\Delta_1 s_2} \cdots \int_0^{s_{2n-1}} e^{-i\Delta_1 s_{2n}} ds_n\right]\right\} \quad , \tag{3.32}$$

avec

$$\omega_{01}^2 = \rho^2\left(k+1\right) \quad , \tag{3.33}$$

et

$$\Delta_1 = \varepsilon - \omega - 2\chi\left(k+2\right) \quad . \tag{3.34}$$

Cette dernière expression (3.32) peut être écrite sous la forme plus commode . En effet , nous mettons d'abord :

$$F(0\ ,T) = \sum_{n\,=\,0}^{+\infty}\left[(\omega_{01})^{2n}\int_0^T e^{i\Delta_1 S_1}ds_1\int_{S_1}^T e^{-i\Delta_1 S_2}ds_2...\int_0^{S_{2n-1}} e^{-i\Delta_1 S_{2n}}ds_{2n}\right]\ , \tag{3.35}$$

et pasons à la transformation de Laplace tout en lui appliquant la théorème de convolution :

$$\widetilde{F}(0,P) = \int_0^{+\infty} dTe^{-pT}F(0,T) = \frac{1}{p}\sum_{n\ =1}^{+\infty}\left[\frac{\omega_{01}^2}{p(p-i\ \Delta_1)}\right]^n\ . \tag{3.36}$$

Le résultat est encore est une série qui ici simplement égale à :

$$\widetilde{F}(0,P) = \frac{(p-i\ \Delta_1)}{p(p-i\ \Delta_1)-\omega_{01}^2} - \frac{1}{p}\ . \tag{3.37}$$

Prenant la transformation inverse de Laplace :

$$F(0,T) = \int_0^{+\infty} dpe^{pT}\widetilde{F}(0,P) = \text{ somme de résidu de } e^{pT}\widetilde{F}(0\ ,P) \text{ à sous les pôles .} \tag{3.38}$$

$$\widetilde{F}(P) = \frac{1}{1-\frac{\omega_{01}^2}{p(p-i\Delta_1)}} - \frac{1}{p} = \frac{(p-i\Delta_1)}{p(p-i\Delta_1)-\omega_{01}^2} - \frac{1}{p} = \frac{(p-i\Delta_1)}{(p-\frac{i\Delta_1}{2})^2+(\sqrt{\frac{\Delta_1^2}{4}-\omega_{01}^2})^2} - \frac{1}{p} \tag{3.39}$$

$$\widetilde{F}(P)e^{pT} = \left(\frac{(p-i\Delta_1)}{p^2-i\Delta_1 P-\omega_{01}^2} - \frac{1}{p}\right)e^{pT} = \left(\frac{(p-i\Delta_1)}{(p-\frac{i\Delta_1}{2})^2+\left(\frac{\Delta_1}{2}\right)^2-\omega_{01}^2} - \frac{1}{p}\right)e^{pT}\ . \tag{3.40}$$

Dans les mêmes conditions présentées dans la référence . [27] nous trouvons cela :

$$\frac{\Delta_1^2}{4} - \omega_{01}^2 \geq 0\ , \tag{3.41}$$

$$|\varepsilon-\omega-2\chi\,(k+2)| \geq 2\rho\sqrt{(k+1)}\ . \tag{3.42}$$

Alors (3.40) devient :

$$\widetilde{F}(P)e^{pT} = \left[\frac{p - i\ \Delta_1}{\left(p - \frac{i\ \Delta_1}{2} + i\sqrt{\frac{\Delta_1^2}{4} - \omega_{01}^2}\right)\left(p - \frac{i\ \Delta_1}{2} - i\sqrt{\frac{\Delta_1^2}{4} - \omega_{01}^2}\right)} - \frac{1}{p}\right] e^{pT}\ . \tag{3.43}$$

3.3.1 Première méthode :

évaluant les résidus aux trois pôles simples nous obtenons :

résidu à $p = 0$ est 1. résidu à $p = \frac{i\Delta_1}{2} - i\sqrt{\frac{\Delta_1^2}{4} - \omega_{01}^2}$ est $\frac{\frac{i\ \Delta_1}{2} - i\ \Omega_1}{-2i\ \Omega_1} e^{(\frac{i\ \Delta_1}{2} - i\ \Omega_1)T}$.

résidu à $p = \frac{i\ \Delta_1}{2} + i\sqrt{\frac{\Delta_1^2}{4} - \omega_{01}^2}$ est $\frac{\frac{i\ \Delta_1}{2} + i\ \Omega_1}{2i\ \Omega_1} e^{(\frac{i\ \Delta_1}{2} + i\ \Omega_1)T}$.

Alors en utilisant (3.38) nous avons :

$$F(0, T) = \frac{\frac{i\ \Delta_1}{2} - i\ \Omega_1}{-2i\ \Omega_1} e^{(\frac{i\Delta_1}{2} - i\Omega_1)T} + \frac{\frac{i\ \Delta_1}{2} + i\ \Omega_1}{2i\ \Omega_1} e^{(\frac{i\ \Delta_1}{2} + i\ \Omega_1)T} - 1\ , \tag{3.44}$$

et

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{\Delta_1^2}{4} - \omega_{01}^2}\ . \tag{3.45}$$

Noter ce $F(0, T)$ est écrit sous la forme e^{-iET} avec E étant le réel , en conséquence ces valeurs propres sont vraiment fournies $\left(|\omega + 2\chi\,(k+2) - \varepsilon| \succeq 2\rho\sqrt{k+1}\right)$ [27] .

Un calcul similaire nous permet alors d'obtenir les autres éléments de (3.22) .

Il sont les suivantes :

$$K_{11}(f; i, T) = \cos(\frac{\theta_f}{2})\cos(\frac{\theta_i}{2})e^{\frac{i}{2}(\varphi_f - \varphi_i)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(|\ z_f\ |^2 + |\ z_i\ |^2\right)\right)$$

$$\times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(Z_f^* Z_i)^k}{k!} e^{-i\eta_1 T}\left[\cos(\Omega_1 T) - \frac{i\ \Delta_1}{2\Omega_1}\sin(\Omega_1 T)\right]\ , \tag{3.46}$$

avec

$$\eta_1 = \chi(k^2+3k+2) + (k+\frac{1}{2})\omega + \chi\,(k+2)\ , \tag{3.47}$$

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{\Delta_1^2}{4} - \omega_{01}^2}\ . \tag{3.48}$$

3.3.2 Deuxième méthode :

on a :

$$\begin{aligned} I_q(\ \uparrow\ ,\uparrow,p) &= \int_0^{+\infty} dT e^{-pT} I_q(\uparrow,\uparrow,T) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\omega_{01}^2)^n \int_0^T e^{i\Delta_1 s_1} ds_1 \int_0^{s_1} e^{-i\Delta_1 s_2} ds_2 ... \int_0^{s_{2n-1}} e^{-i\Delta_1 s_{2n}} ds_{2n}\ , \end{aligned} \tag{3.49}$$

on suppose :

$$F(0,T) = \int_0^T e^{i\Delta_1 s_1} ds_1 \int_0^{s_1} e^{-i\Delta_1 s_2} ds_2 ... \int_0^{s_{2n-1}} e^{-i\Delta_1 s_{2n}} ds_{2n}\ , \tag{3.50}$$

donc :

$$I_q(\uparrow,\uparrow,T) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\omega_{01}^2)^n F(0,T)\right]\ . \tag{3.51}$$

Pour utiliser la transformation de Laplace et la théorie de convolution :

$$\widetilde{F}(0,p) = \int_0^{+\infty} e^{-pT} F(0,T) dT = \int_0^{+\infty} dT e^{-pT} \int_0^T e^{i\Delta_1 s_1} F_1(0,s_1) ds_1\ . \tag{3.52}$$

produit par $e^{i\Delta_1 T} e^{-i\Delta_1 T}$

$$\int_0^{+\infty} dT e^{-(p-i\Delta_1)T} \int_0^T e^{-i\Delta_1 (T-s_1)} F_1(0,s_1) ds_1\ , \tag{3.53}$$

et

$$
\begin{aligned}
G(p)F(p) &= \int_0^s f(s)g(T-s)ds \qquad (3.54)\\
&= \int_0^{+\infty} dTe^{-(p-i\Delta_1)T}F_1(0,T)\int_0^{+\infty} dTe^{-(p-i\ \Delta_1)T}e^{-i\ \Delta_1 T}\ ,
\end{aligned}
$$

donc :

$$
\widetilde{F}(0,p) = \frac{1}{p}\widetilde{F}_1(0,p-i\Delta_1)\ . \qquad (3.55)
$$

$$
\widetilde{F}_1(0,p-i\Delta_1) = \int_0^{+\infty} e^{-(p-i\Delta)T}F_1(0,T)dT = \int_0^{+\infty} e^{-(p-i\Delta_1)T}dT\int_0^{s_1} e^{-i\Delta_1 s_2}ds_2F_2(0,s_2)\ , \qquad (3.56)
$$

produit par $e^{i\Delta_1 T}e^{-i\Delta_1 T}$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} e^{-(p-i\Delta_1)T}e^{-i\Delta_1 T}dT\int_0^{s_1} e^{-i\Delta_1 s_2}ds_2F_2(0,s_2)\\
&= \int_0^{+\infty} e^{-pT}F_1(0,T)dT\int_0^{+\infty} e^{-(p-i\Delta_1)T}dT\\
&= \frac{1}{p-i\Delta_1}\widetilde{F}_2(0,p)\ . \qquad (3.57)
\end{aligned}
$$

Même manière par apport aux autres termes, donc le résultat final est :

$$
\widetilde{F}(0,p) = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{p(p-i\Delta_1)}\right]^n.
$$

On a :

$$
\widetilde{F}(0,T)= \int_0^{+\infty} e^{+pT}F(0,p)dp\ ,
$$

et

$$
I_q(\uparrow,\uparrow,T) = \left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(\omega_{01}^2)^n\int_0^{+\infty} e^{+pT}\frac{1}{p}\left[\frac{1}{p(p-i\Delta_1)}\right]^n dp\right]\ , \qquad (3.58)
$$

on suppose :

$$\begin{aligned} s &= \sum_{n=1}^{\infty}(\omega_{01}^2)^n\left[\frac{1}{p(p-i\Delta_1)}\right]^n \\ s &= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\left[\frac{\omega_{01}^2}{p(p-i\Delta_1)}\right]^n}{1-\frac{\omega_{01}^2}{p(p-i\Delta_1)}}\ , \end{aligned} \tag{3.59}$$

si la condition est vérifiée :$\left|\frac{\omega_{01}^2}{p(p-i\Delta_1)}\right| \leq 1$ .i.e $|\hbar\omega+2\chi\,(k+2)-\varepsilon| \geq 2\rho\sqrt{k+1}$ donc :

$$s=\frac{1}{1-\frac{\omega_{01}^2}{p(p-i\Delta_1)}}=\frac{p(p-i\Delta_1)}{p(p-i\Delta_1)-\omega_{01}^2}\ , \tag{3.60}$$

et

$$\tilde{F}(0,p)=\frac{1}{p}(s-1)=\frac{(p-i\Delta_1)}{p(p-i\Delta_1)-\omega_{01}^2}-\frac{1}{p}\ , \tag{3.61}$$

calcul $\int_0^{+\infty}e^{+pT}\frac{(p-i\Delta_1)}{p(p-i\Delta_1)-\omega_{01}^2}dp$:

on a :

$$\begin{aligned} e^{bx}\sin(ax) &= \int_0^{+\infty}\frac{a}{(p-b)^2+a^2}e^{+pT}dp\ , \\ e^{bx}\cos(ax) &= \int_0^{+\infty}\frac{p-b}{(p-b)^2+a^2}e^{+pT}dp\ , \end{aligned} \tag{3.62}$$

donc :

$$\int_0^{+\infty}\frac{p-\frac{i\Delta_1}{2}}{p(p-i\Delta_1)-\omega_{01}^2}e^{+pT}dp=\int_0^{+\infty}\frac{p-\frac{i\Delta_1}{2}}{(p-\frac{i\Delta_1}{2})^2+(\sqrt{\frac{\Delta_1^2}{4}-\omega_{01}^2})^2}e^{+pT}dp\ , \tag{3.63}$$

on suppose :

$$\Omega_1=\sqrt{\frac{\Delta_1^2}{4}-\omega_{01}^2}\ , \tag{3.64}$$

donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{p-\frac{i\Delta_1}{2}}{p(p-i\Delta_1)-\omega_{01}^2} e^{+pT} dp = e^{\frac{i\Delta_1}{2}T}\cos(\Omega_1 T) \ , \tag{3.65}$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{-\frac{i\Delta_1}{2}}{p(p-i\Delta_1)-\omega_{01}^2} e^{+pT} dp = -\frac{i\Delta_1}{2}\frac{1}{\Omega_1} e^{\frac{i\Delta_1}{2}T}\sin(\Omega_1 T) \ , \tag{3.66}$$

$$I_q(\uparrow,\uparrow,T) = 1-1+e^{\frac{i\Delta_1}{2}T}\left[\cos(\Omega_1 T)-\frac{i\Delta_1}{2\Omega_1}\sin(\Omega_1 T)\right] == e^{\frac{i\Delta_1}{2}T}\left[\cos(\Omega_1 T)-\frac{i\Delta_1}{2\Omega_1}\sin(\Omega_1 T)\right] \ . \tag{3.67}$$

Maintenant (3.23) présente la forme la plus simple :

$$K_{11}(f;i,T) = \cos(\frac{\theta_f}{2})\cos(\frac{\theta_i}{2}) e^{\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mid z_f \mid^2 + \mid z_i \mid^2\right)\right)$$

$$\times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(Z_f^* Z_i)^k}{k!} e^{-i\eta_1 T}\left[\cos(\Omega_1 T)-\frac{i\Delta_1}{2\Omega_1}\sin(\Omega_1 T)\right] \ , \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned} K_{22}(f,i,T) \ &= \ \sin(\frac{\theta_f}{2})\sin(\frac{\theta_i}{2})\exp\left[-\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)\right] \\ &\times (K_0^-(Z_f \ , Z_i \ ; T) + (\overset{\infty}{\underset{n=1}{\Sigma}}(-i\rho)^{2n}\int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 ... \int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n} \int \frac{d^2 Z_1}{\pi}\int\frac{d^2 Z_2}{\pi} \\ &\times \int \frac{d^2 Z_3}{\pi} .... \int \frac{d^2 Z_{2n}}{\pi} K_0^-(Z_f \ , Z_1 ; T-s_1) Z_1^* \\ & K_0^+(Z_1 \ , Z_2 \ ; \ s_1 - s_2) Z_2 ... Z_{2n} K_0^-(Z_{2n} \ , \ Z_i \ \ ; s_{2n})) \ , \end{aligned} \tag{3.69}$$

$$
\begin{aligned}
K_{22}(f\ ,i\ ;T) \ \ &= \ \ \sin(\frac{\theta_f}{2})\sin(\frac{\theta_i}{2})\exp\left[-\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)\right] \\
&\times\exp\left[-\frac{\mid Z_f\mid^2+\mid Z_i\mid^2}{2}\right]\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{Z_f^*Z_i}{k!})^k \\
&\exp\left[-i(\chi(k+2)(k+1)+k\omega-\frac{\varepsilon}{2})T\right] \\
&(1+(\sum_{n=1}^{\infty}(-i\rho\frac{(k+1)!}{\sqrt{k!(k+1)!}})^{2n}\int_0^T e^{-i\Delta_2 s_1}ds_1 \\
&\times\int_0^{s_1}e^{+i\Delta_2 s_2}ds_2...\int_0^{s_{2n-1}}e^{+i\Delta_2 s_{2n}}ds_{2n})\ , \qquad (3.70)
\end{aligned}
$$

$$
I_q(\ \downarrow\ \ ,\downarrow,p)=\int_0^{+\infty}dTe^{-pT}I_q(\downarrow,\downarrow,T)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(\omega_{10}^2)^n\int_0^T e^{-i\Delta_2 s_1}ds_1\int_0^{s_1}e^{+i\Delta_2 s_2}ds_2...\int_0^{s_{2n-1}}e^{+i\Delta_2 s_{2n}}ds_{2n}
$$

$$
I_q(\ \downarrow\ \ ,\downarrow,T)=\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(\omega_{10}^2)^nF(0,T)\right]\ , \qquad (3.71)
$$

et

$$
F(0,T)=\int_0^T e^{-i\Delta_2 s_1}ds_1\int_0^{s_1}e^{+i\Delta_2 s_2}ds_2...\int_0^{s_{2n-1}}e^{+i\Delta_2 s_{2n}}ds_{2n}\ , \qquad (3.72)
$$

pour utiliser la transformation de Laplace et la théorie de convolution :

$$
\widetilde{F}(0,p)=\int_0^{+\infty}e^{-pT}F(0,T)dT=\int_0^{+\infty}dTe^{-pT}\int_0^T e^{-i\Delta_2 s_1}F_1(,s_1)ds_1\ , \qquad (3.73)
$$

produit par $e^{i\Delta_2 T}e^{-i\Delta_2 T}$

$$
\int_0^{+\infty}dTe^{-(p+i\Delta_2)T}\int_0^T e^{-i\Delta_2(T-s_1)}F_1(0,s_1)ds_1\ , \qquad (3.74)
$$

et

$$
G(p)F(p)=\int_0^s f(s)g(T-s)ds=\int_0^{+\infty}dTe^{-(p+i\Delta_2)T}F_1(0,T)\int_0^{+\infty}dTe^{-(p-i\Delta_2)T}e^{-i\Delta_2 T} \qquad (3.75)
$$

$$\widetilde{F}(0,p)=\frac{1}{p}\widetilde{F}_1(0,p+i\Delta_2)\ , \tag{3.76}$$

$$\widetilde{F}_1(0,p+i\Delta_2)=\int_0^{+\infty}e^{-(p+i\Delta_2)T}F_1(0,T)dT=\int_0^{+\infty}e^{-(p+i\Delta_2)T}dT\int_0^{s_1}e^{+i\Delta_2 s_2}ds_2F_2(0,s_2) \tag{3.77}$$

produit par $e^{i\Delta_2 T}e^{-i\Delta_2 T}$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}e^{-(p+i\Delta_2)T}e^{+i\Delta_2 T}dT\int_0^{s_1}e^{+i\Delta_1 s_2}e^{-i\Delta_2 T}ds_2F_2(0,s_2)\\
=&\int_0^{+\infty}e^{-pT}dT\int_0^{s_1}e^{-i\Delta_2(T-s_2)}ds_2F_2(0,s_2)\\
=&\frac{1}{p+i\Delta_2}\widetilde{F}_2(0,p)\quad .
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Même manière par apport aux autre termes donc le résultat final est :

$$K(f;i,T)=\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mid z_f\mid^2+\mid z_i\mid^2\right)\right)\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{(Z_f^*Z_i)^k}{k!}(\cos(\frac{\theta_f}{2})\cos(\frac{\theta_i}{2})e^{\frac{i}{2}\left(\varphi_f-\varphi_i\right)}$$

$$e^{-i\eta_1 T}\left[\cos(\Omega_1 T)-\frac{i\Delta_1}{2\Omega_1}\sin(\Omega_1 T)\right]$$

$$+\sin(\frac{\theta_f}{2})\sin(\frac{\theta_i}{2})e^{\frac{-i}{2}\left(\varphi_f-\varphi_i\right)}\times e^{-i\eta_2 T}\left[\cos(\Omega_2 T)+\frac{i\Delta_2}{2\Omega_2}\sin(\Omega_2 T)\right]$$

$$-i\rho\cos(\frac{\theta_f}{2})\sin(\frac{\theta_i}{2})e^{-\frac{i}{2}\left(\varphi_f+\varphi_i\right)}Z_f^*\frac{(k+l)!}{(k+l-m)!}\frac{1}{\Omega_1}\sin(\Omega_1 T)e^{-i\eta_1 T}$$

$$+i\rho\sin(\frac{\theta_f}{2})\cos(\frac{\theta_i}{2})e^{\frac{-i}{2}\left(\varphi_f+\varphi_i\right)}Z_i\frac{1}{\Omega_1}\sin(\Omega_1 T)e^{-i\eta_1 T}))\ , \tag{3.79}$$

avec

$$\eta_2=\chi(k^2+3k+2)+(k-\frac{1}{2})\omega-\chi\,(k+1)\ , \tag{3.80}$$

et

$$\Delta_2=\varepsilon-\omega-2\chi\,(k+1)\ , \tag{3.81}$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{\Delta_2^2}{4} - \omega_{10}^2}\ , \tag{3.82}$$

$$\omega_{10} = \frac{\rho k!}{\sqrt{(k-1)!k!}}\ . \tag{3.83}$$

Un calcul similaire nous permet alors d'obtenir les autres éléments de (3.22) .

Il sont les suivantes :

$$K_{12}(f,i;T) = -i\rho\cos\frac{\theta_f}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)}\exp\left(-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}\right)$$

$$\times Z_f^*\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Z_f^*Z_i)^k}{k!}\frac{\sin\Omega_1 T}{\Omega_1}e^{-i\eta_1 T}, \tag{3.84}$$

$$K_{21}(f,i;T) = i\rho\sin\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)}\exp\left(-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}\right)$$

$$\times Z_i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Z_f^*Z_i)^k}{k!}\frac{\sin\Omega_1 T}{\Omega_1}e^{-i\eta_1 T}\ . \tag{3.85}$$

Le propagateur (3.22) relatif au cas particulier est finalement :

$$K(Z_f,\Omega_f,Z_i,\Omega_i;T) = \exp\left(-\frac{|Z_f|^2+|Z_i|^2}{2}\right)\times$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg\{\frac{(Z_f^*Z_i)^k}{k!}\Bigg[&\cos\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\left(\cos\Omega_1 T - i\frac{\Delta_1}{2\Omega_1}\sin\Omega_1 T\right)e^{-i\eta_1 T}\\ &+\sin\frac{\theta_f}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_f-\varphi_i)}\left(\cos\Omega_2 T + i\frac{\Delta_2}{2\Omega_2}\sin\Omega_2 T\right)e^{-i\eta_2 T}\\ &-i\rho\cos\frac{\theta_f}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)}Z_f^*\frac{\sin\Omega_1 T}{\Omega_1}e^{-i\eta_1 T}\\ &+i\rho\sin\frac{\theta_f}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi_f+\varphi_i)}Z_i\frac{\sin\Omega_1 T}{\Omega_1}e^{-i\eta_1 T}\Bigg]\Bigg\}\ .\end{aligned} \tag{3.86}$$

Notre probléme est ainsi résolu.

Nous pouvons alors determiner les énergies ainsi que les fonctions d'onde correspondentes .

3.4 Les fonctions d'onde et l'énergie :

Pour cela , passons à la représentation habituelle pour le spin avec les projections sur l'axe oz étant m_f et m_i .

$$\begin{aligned} K_s\left(Z_f\ ,m_f\ ,Z_i\ ,m_i\ ;T\right) &= \frac{1}{2\pi}\int d\cos(\theta_f)d\varphi_f\frac{1}{2\pi}\int d\cos(\theta_i)d\varphi_i \\ &\times <\ m_f\left|\Omega_f\right\rangle K\left(Z_f,\Omega_f;Z_f,\Omega_i;T\right)\left\langle\Omega_i\right|m_i>\ , \end{aligned} \tag{3.87}$$

avec

$$< m_f\left|\theta_f,\varphi_f\right\rangle = \sqrt{\frac{(2s)!}{(s+m_f)!\,(s-m_f)!}}\left(-\sin\frac{\theta_f}{2}\right)^{s-m_f}\left(\cos\frac{\theta_f}{2}\right)^{s+m_f}e^{-im_f\varphi_f}\ , \tag{3.88}$$

et

$$\left\langle\theta_i\ ,\varphi_i\right|m_i> = \sqrt{\frac{(2s)!}{(s+m_i)!\,(s-m_i)!}}\left(-\sin\frac{\theta_f}{2}\right)^{s-m_i}\left(\cos\frac{\theta_f}{2}\right)^{s+m_i}e^{+im_i\varphi_i}\ . \tag{3.89}$$

Si nous fixons l'état initial de l'atome comme $|m_i\rangle = |\downarrow\rangle$; et l'état final $|m_f\rangle = |\uparrow\rangle$; nous obtenons :

$$<\uparrow\left|\Omega_f\right\rangle = \cos\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_f}\ , \qquad \text{et} \qquad \left\langle\Omega_i\right|\uparrow> = \cos\frac{\theta_i}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_i}\ . \tag{3.90}$$

Après intégration sur les coordonnées polaires , on obtient par exemple :

$$K_{11}(Z_f\ ,Z_i\ ;T) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(|\ z_f\ |^2+|\ z_i\ |^2\right)\right)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{Z_f^*Z_i^k}{k!}\left[\cos(\Omega_1T)-\frac{i\Delta_1}{2\Omega_1}\sin(\Omega_1T)\right]e^{-i\eta_1T}\ . \tag{3.91}$$

Avec les calculs similaire pour les autres éléments , le propagateur est donné par :

$$K_{\uparrow\downarrow}\left(Z_f\ ,Z_i\ ;T\right)=-i\rho Z_f^{*}e^{-\frac{\left|z_f\right|^2+\left|z_i\right|^2}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(Z_f^{*}Z_i\right)^k}{k!}\frac{\sin\Omega_1T}{\Omega_1}e^{-i\eta_1T}\ , \tag{3.92}$$

$$K_{\downarrow\uparrow}\left(Z_f\ ,Z_i\ ;T\right)=i\rho Z_ie^{-\frac{\left|z_f\right|^2+\left|z_i\right|^2}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(Z_f^{*}Z_i\right)^k}{k!}\frac{\sin\Omega_1T}{\Omega_1}e^{-i\eta_1T}\ , \tag{3.93}$$

$$K_{\downarrow\downarrow}\left(Z_f\ ,Z_i\ ;T\right)=e^{-\frac{\left|z_f\right|^2+\left|z_i\right|^2}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(Z_f^{*}Z_i\right)^k}{k!}\left(\cos\Omega_2T+i\frac{\Delta_2}{2\Omega_2}\sin\Omega_2T\right)e^{-i\eta_2T}, \tag{3.94}$$

où nous avons noté l'amplitude de transition $K\left(Z_f,\uparrow,Z_i\ ,\uparrow;T\right)$ par $K_{\uparrow\uparrow}\left(Z_f,Z_i;T\right)$.

Afin d'extraire les fonctions d'onde ainsi que le spectre d'énergie , il est plus approprié de passer à la base $|l>$ où l est le nombre d'occupation . La relation avec $|Z>$ est :

$$|Z\rangle=\exp\left(-\frac{\mid z\mid^2}{2}\right)\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{z_l}{\sqrt{l!}}\left|l\right\rangle\ . \tag{3.95}$$

L'operateur d'evolution :

$$e^{-iHT}=\begin{pmatrix}\Lambda_{\uparrow\uparrow} & \Lambda_{\uparrow\downarrow}\\ \Lambda_{\downarrow\uparrow} & \Lambda_{\downarrow\downarrow}\end{pmatrix}\ , \tag{3.96}$$

est une de type matriciel (2x2) , sa relation avec $K\left(Z_f,Z_i;T\right)$ est :

$$e^{-iHT}=\int\frac{d^2z_f}{2\pi}\frac{d^2z_i}{2\pi}\left|Z_f\right\rangle K(f;i,T)\left\langle Z_i\right|\ . \tag{3.97}$$

Après l'intégration , les éléments de matrice (l'opérateur)d'évolution par rapport à notre problème , sont les suivants :

$$\Lambda_{\uparrow\uparrow}=\int\frac{d^2z_f}{\pi}\frac{d^2z_i}{\pi}\left|z_f\right\rangle K_{\uparrow\uparrow}\left\langle z_i\right|\ . \tag{3.98}$$

En substituant l'éxpression de$K_{\uparrow\uparrow}$ (3.91)et (3.68) dans (3.98)on trouve

$$\Lambda_{\uparrow\uparrow} = \int \frac{d^2z_f}{\pi}\frac{d^2z_i}{\pi} \exp\left[-\frac{\mid z_f \mid^2}{2}\right] \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z_f^l}{\sqrt{l!}} |l\rangle \exp\left[-\frac{\mid z_f \mid^2 + \mid z_i \mid^2}{2}\right] \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{z_f^* z_i}{k!})^k$$

$$\times \left[\cos(\Omega_1 T) - \frac{i\Delta_1}{2\Omega_1} \sin(\Omega_1 T)\right] e^{-i\eta_1 T} \exp\left[-\frac{\mid z_i \mid^2}{2}\right] \sum_{l'=0}^{\infty} \frac{z_f^{*l'}}{\sqrt{l'!}} \langle l'| \ , \tag{3.99}$$

par integration sur Z en utilisant la relation (3.27) et aprés un calcul simple l'éxpression (3.99) devient :

$$\Lambda_{\uparrow\uparrow} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\cos(\Omega_1 T) - \frac{i\Delta_1}{2\Omega_1} \sin(\Omega_1 T)\right] e^{-i\eta_1 T} |k\rangle \langle k| \ . \tag{3.100}$$

Avec les calculs similaires pour les autres éléments on a :

$$\Lambda_{\uparrow\downarrow} = \int \frac{d^2z_f}{\pi}\frac{d^2z_i}{\pi} |z_f\rangle K_{\uparrow\downarrow} \langle z_i|$$

$$\Lambda_{\uparrow\downarrow} = \int \frac{d^2z_f}{\pi}\frac{d^2z_i}{\pi} \exp\left[-\frac{\mid z_f \mid^2}{2}\right] \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z_f^l}{\sqrt{l!}} |l\rangle \exp\left[-\frac{\mid z_f \mid^2 + \mid z_i \mid^2}{2}\right] \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{z_f^* z_i}{k!})^k$$

$$\times(-iz_f^*)\frac{1}{\Omega_1} \sin(\Omega_1 T) e^{-i\eta_1 T} \exp\left[-\frac{\mid z_i \mid^2}{2}\right] \sum_{l'=0}^{\infty} \frac{z_f^{*l'}}{\sqrt{l'!}} \langle l'|$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_{lk+1}\sqrt{l!}\sqrt{(k+1)!}}{\sqrt{k!}\sqrt{l!}} |l\rangle \ \frac{\delta_{l'k}\sqrt{l'!}\sqrt{k!}}{\sqrt{k!}\sqrt{l'!}} \langle l'| (-i\rho)\frac{1}{\Omega_1} \sin(\Omega_1 T) e^{-i\eta_1 T} \ , \tag{3.101}$$

par condition $(k = l')$ et $k+1 = l$ on a :

$$\Lambda_{\uparrow\downarrow} = -i\rho \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{K+1}\frac{1}{\Omega_1} \sin(\Omega_1 T) e^{-i\eta_1 T} |k\rangle \langle k+1| \ . \tag{3.102}$$

On a :

$$\Lambda_{\downarrow\uparrow} = \int \frac{d^2z_f}{\pi}\frac{d^2z_i}{\pi} |z_f\rangle K_{\downarrow\uparrow} \langle z_i|$$

$$\Lambda_{\downarrow\uparrow} = \int \frac{d^2 z_f}{\pi}\frac{d^2 z_i}{\pi} \exp\left[-\frac{\mid z_f \mid^2}{2}\right] \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z_f^l}{\sqrt{l!}} |l\rangle \exp\left[-\frac{\mid z_f \mid^2 + \mid z_i \mid^2}{2}\right] \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{z_f^* z_i}{k!})^k$$

$$\times (i\rho z_i)\frac{1}{\Omega_1}\sin(\Omega_1 T)e^{-i\eta_1 T} \exp\left[-\frac{\mid z_i \mid^2}{2}\right] \sum_{l'=0}^{\infty} \frac{z_f^{*l'}}{\sqrt{l'!}} \langle l'|$$

$$= i\rho \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_{lk}\sqrt{l!}\sqrt{k!}}{\sqrt{k!}\sqrt{l!}} |l\rangle \, \frac{\delta_{l'k+1}\sqrt{l'!}\sqrt{(k+1)!}}{\sqrt{k!}\sqrt{l'!}} \langle l'| \, \frac{1}{\Omega_1}\sin(\Omega_1 T)e^{-i\eta_1 T} \ , \tag{3.103}$$

par condition $(k+1 = l')$ et $(k = l\ )$ on a donc la forme générale de$\Lambda_{\downarrow\uparrow}$ est :

$$\Lambda_{\downarrow\uparrow} = i\rho \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k+1}\frac{1}{\Omega_1}\sin(\Omega_1 T)e^{-i\eta_1 T} |k+1\rangle \langle k| \ . \tag{3.104}$$

On a :

$$\Lambda_{\downarrow\downarrow} = \int \frac{d^2 z_f}{\pi}\frac{d^2 z_i}{\pi} |z_f\rangle K_{\downarrow\downarrow} \langle z_i|$$

$$= \int \frac{d^2 z_f}{\pi}\frac{d^2 z_i}{\pi} \exp\left[-\frac{\mid z_f \mid^2}{2}\right] \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z_f^l}{\sqrt{l!}} |l\rangle \exp\left[-\frac{\mid z_f \mid^2 + \mid z_i \mid^2}{2}\right] \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{z_f^* z_i}{k!})^k$$

$$\times e^{-i\eta_2 T}\left[\cos(\Omega_2 T) + \frac{i\Delta_2}{2\Omega_2}\sin(\Omega_2 T)\right] \exp\left[-\frac{\mid z_i \mid^2}{2}\right] \sum_{l'=0}^{\infty} \frac{z_f^{*l'}}{\sqrt{l'!}} \langle l'|$$

$$\Lambda_{\downarrow\downarrow} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_{lk}\sqrt{l!}\sqrt{k!}}{\sqrt{k!}\sqrt{l!}} |l\rangle \, \frac{\delta_{l'k}\sqrt{l'!}\sqrt{k!}}{\sqrt{k!}\sqrt{l'!}} \langle l'| \, e^{-i\eta_2 T}\left[\cos(\Omega_2 T) + \frac{i\Delta_2}{2\Omega_2}\sin(\Omega_2 T)\right] \ , \tag{3.105}$$

par condition $(k = l')$ et $(k = l\ )$ on a donc :

$$\Lambda_{\downarrow\downarrow} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\cos(\Omega_1 T) + \frac{i\Delta_1}{2\Omega_1}\sin(\Omega_1 T)\right] e^{-i\eta_1 T} |k+1\rangle \langle k+1| \ , \tag{3.106}$$

$$\Delta_2 = \varepsilon - \omega - 2\chi(k+1) \ , \tag{3.107}$$

et

$$\Delta_1 = \varepsilon - \omega - 2\chi(k+2) \ , \tag{3.108}$$

en changant k par $k+1$ ça donne :

$$\Delta_2 = \varepsilon - \omega - 2\chi(k+1) \ ,$$

$$\Delta_2 = \varepsilon - \omega - 2\chi(k+1+1) = \Delta_1 \ , \tag{3.109}$$

et

$$\omega_{10} = \frac{\rho k!}{\sqrt{(k-1)!k!}} \ , \tag{3.110}$$

en remplaçant k par $K+1$ ça donne ce terme :

$$\omega_{10} = \rho\frac{(k+1)!}{\sqrt{k!(k+1)!}} = \omega_{01} \ , \tag{3.111}$$

donc :

$$\Lambda_{\downarrow\downarrow} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-i\eta_1 T}\left(\cos\Omega_1 T + i\frac{\Delta_1}{2\Omega_1}\sin\Omega_1 T\right)|k+1\rangle\langle k+1| , \tag{3.112}$$

Nous pouvons alors voir après cette décomposition , que les niveaux d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes sont respectivement :

$$\begin{aligned} E_k^{\pm} &= \eta_1 \pm \sqrt{\frac{\Delta_1^2}{4} - \varpi_{01}^2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\left[\chi(2k^2+6k+4) + (2k+1)\omega + 2\chi\left(k+2\right)\right] \pm \sqrt{\left(\omega-\varepsilon\right)^2 - 4\rho^2\left(k+1\right)}\right] \ , \end{aligned} \tag{3.113}$$

$$\cos(\Omega_1 T) - \frac{i\Delta_1}{2\Omega_1}\sin(\Omega_1 T) = \left(\frac{e^{+i\Omega_1 T} + e^{-i\Omega_1 T}}{2}\right) - \frac{i\Delta_1}{2\Omega_1}\left(\frac{e^{+i\Omega_1 T} - e^{-i\Omega_1 T}}{2i}\right)$$

$$\cos(\Omega_1 T) - \frac{i\Delta_1}{2\Omega_1}\sin(\Omega_1 T) = e^{+i\Omega_1 T}\left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta_1}{4\Omega_1}\right) + e^{-i\Omega_1 T}\left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta_1}{4\Omega_1}\right) \ , \tag{3.114}$$

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{\Delta_1^2}{4} - \omega_{01}^2} \tag{3.115}$$

on a :

$$\Lambda_{\uparrow\uparrow} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\cos(\Omega_1 T) - \frac{i\Delta_1}{2\Omega_1}\sin(\Omega_1 T)\right] e^{-i\eta_1 T} \left|k\right\rangle \left\langle k\right| \tag{3.116}$$

supposons que :

$$E_k^{\pm} = \eta_1 \pm \Omega_1 \ , \tag{3.117}$$

$$2\rho\sqrt{k+1} = (\omega - \varepsilon + 2\chi(k+2))\sin\left(\theta_{k+1}\right) \ , \tag{3.118}$$

donc on a :

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{\Delta_1^2}{4} - \omega_{01}^2} = \sqrt{\frac{\Delta_1^2 - 4\omega_{01}^2}{4}} = \sqrt{\frac{\Delta_1^2\left(1 - \frac{4\omega_{01}^2}{\Delta_1^2}\right)}{4}} = \frac{\Delta_1}{2}\sqrt{\left[1 - \left(\frac{2\omega_{01}}{\Delta_1}\right)^2\right]}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \frac{\Delta_1}{2}\sqrt{\left(1 - \frac{2\omega_{01}}{\Delta_1}\right)\left(1 + \frac{2\omega_{01}}{\Delta_1}\right)} \\
&= \frac{\Delta_1}{2}\sqrt{\left(1 + 2\sin\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right)\right)\left(1 - 2\sin\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right)\right)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\Delta_1}{2}\sqrt{\left(1 + \sin\left(\theta_{k+1}\right)\right)\left(1 - \sin\left(\theta_{k+1}\right)\right)} = \frac{\Delta_1}{2}\sqrt{\left(1 - \sin^2\left(\theta_{k+1}\right)\right)} = \frac{\Delta_1}{2}\cos\left(\theta_{k+1}\right) \ , \tag{3.119}$$

les résultats sont :

$$\Omega_1 = \frac{\Delta_1}{2}\cos\left(\theta_{k+1}\right) \ , \tag{3.120}$$

$$E_k^{+} = \eta_1 + \Omega_1 = \chi(k^2 + 3k + 2) + \chi(k+2) + (k + \frac{1}{2})\omega + \frac{(-\varepsilon + \omega) - 2\chi(k+2)}{2}\cos\left(\theta_{k+1}\right)$$

$$E_k^{+} = \chi(k^2 + 3k + 2) - \chi(k+2)\cos\left(\theta_{k+1}\right) + \frac{\omega}{2}\left[2k + 1 + \cos\left(\theta_{k+1}\right)\right] - \frac{\varepsilon}{2}\cos\left(\theta_{k+1}\right) + \chi\left(k+2\right) \ , \tag{3.121}$$

$$E_k^- = \eta_1 - \Omega_1 = \chi(k^2+3k+2) + \chi\,(k+2) + (k+\frac{1}{2})\omega - \frac{(-\varepsilon+\omega) - 2\chi(k+2)}{2}\cos(\theta_{k+1})$$

$$E_k^- = \chi(k^2+3k+2) + \chi(k+2)\cos(\theta_{k+1}) + \chi\,(k+2) + \frac{\omega}{2}\left[(2k+1) - \cos(\theta_{k+1})\right] + \frac{\varepsilon}{2}\cos(\theta_{k+1}) \quad , \tag{3.122}$$

$$\Lambda_{\uparrow\downarrow} = (-i\rho)\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{k+1}\frac{1}{\Omega_1}\sin(\Omega_1 T)e^{-i\eta_1 T}\left|k+1\right\rangle\left\langle k\right| \quad , \tag{3.123}$$

$$\Lambda_{\downarrow\uparrow} = (i\rho)\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{k+1}\frac{1}{\Omega_1}\sin(\Omega_1 T)e^{-i\eta_1 T}\left|k\right\rangle\left\langle k+1\right| \quad , \tag{3.124}$$

$$\Lambda_{\downarrow\downarrow} = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\cos(\Omega_1 T) + \frac{i\Delta_1}{2\Omega_1}\sin(\Omega_1 T)\right]e^{-i\eta_1 T}\left|k+1\right\rangle\left\langle k+1\right| \quad ,$$

$$\Lambda_{\downarrow\downarrow} = \sum_{k=0}^{\infty}e^{-i\eta_1 T}\left[e^{+i\Omega_1 T}(\frac{1}{2} + \frac{\Delta_1}{4\Omega_1}) + e^{-i\Omega_1 T}(\frac{1}{2} - \frac{\Delta_1}{4\Omega_1})\right]\left|k+1\right\rangle\left\langle k+1\right| \quad , \tag{3.125}$$

on a :

$$\left[\cos(\Omega_1 T) - \frac{i\Delta_1}{2\Omega_1}\sin(\Omega_1 T)\right]e^{-i\eta_1 T}$$

$$= e^{-i\eta_1 T}\left[\frac{e^{i\Omega_1 T} + e^{-i\Omega_1 T}}{2} - \frac{i\Delta_1}{2\Omega_1}\left(\frac{e^{i\Omega_1 T} - e^{-i\Omega_1 T}}{2i}\right)\right]$$

$$= \frac{e^{-i(\eta_1-\Omega_1)T}}{2}\left[1 - \frac{\Delta_1}{2\Omega_1}\right] + \frac{e^{-i(\eta_1+\Omega_1)T}}{2}\left[1 + \frac{\Delta_1}{2\Omega_1}\right] \quad , \tag{3.126}$$

$$(-i\rho)\sqrt{k+1}\frac{1}{\Omega_1}\sin(\Omega_1 T)e^{-i\eta_1 T} = \frac{(-i\rho)\sqrt{k+1}}{\Omega_1}\left[\frac{e^{i\Omega_1 T} - e^{-i\Omega_1 T}}{2i}\right]$$

$$= \frac{e^{-i(\eta_1-\Omega_1)T}}{2}\frac{(-\rho)\sqrt{k+1}}{\Omega_1} + \frac{e^{-i(\eta_1-\Omega_1)T}}{2}\frac{\rho\sqrt{k+1}}{\Omega_1} \quad , \tag{3.127}$$

$$\left[\cos(\Omega_1 T) + \frac{i\Delta_1}{2\Omega_1}\sin(\Omega_1 T)\right]e^{-i\eta_1 T}$$

$$= \frac{e^{-i(\eta_1\Omega_1)T}}{2}\left[1 + \frac{\Delta_1}{2\Omega_1}\right] + \frac{e^{-i(\eta_1+\Omega_1)T}}{2}\left[1 - \frac{\Delta_1}{2\Omega_1}\right]$$

$$i\rho\sqrt{k+1}\frac{1}{\Omega_1}\sin(\Omega_1 T)e^{-i\eta_1 T} = \frac{i\rho\sqrt{k+1}}{\Omega_1}\left[\frac{e^{i\Omega_1 T} - e^{-i\Omega_1 T}}{2i}\right]$$

$$= \frac{e^{-i(\eta_1-\Omega_1)T}}{2}\frac{\rho\sqrt{k+1}}{\Omega_1} + \frac{e^{-i(\eta_1-\Omega_1)T}}{2}\frac{(-\rho)\sqrt{k+1}}{\Omega_1} \quad , \tag{3.128}$$

on suppose :

$$2\rho\sqrt{k+1} = (\omega - \varepsilon + 2\chi(k+2))\sin(\theta_{k+1}) \ , \tag{3.129}$$

donc :

$$1 - \frac{\Delta_1}{2\Omega_1} = 1 - \frac{\Delta_1}{\Delta_1 \cos(\theta_{k+1})} = \frac{\cos(\theta_{k+1}) - 1}{\cos(\theta_{k+1})} \ , \tag{3.130}$$

on a :

$$\cos(\theta_{k+1}) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) \ , \tag{3.131}$$

donc :

$$1 - \frac{\Delta_1}{2\Omega_1} = \frac{-2\sin^2\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right)}{\cos(\theta_{k+1})} \ , \tag{3.132}$$

$$2\rho\sqrt{k+1} = (\omega - \varepsilon + 2\chi(k+2))\sin(\theta_{k+1}) = -\Delta_1 \sin(\theta_{k+1}) \ , \tag{3.133}$$

$$\frac{-\rho\sqrt{k+1}}{2\Omega_1} = \frac{2\sin\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right)}{2\cos(\theta_{k+1})} \ , \tag{3.134}$$

$$\frac{\rho\sqrt{k+1}}{2\Omega_1} = \frac{-2\sin\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right)}{2\cos(\theta_{k+1})} \ , \tag{3.135}$$

$$1 + \frac{\Delta_1}{2\Omega_1} = \frac{2\cos^2\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right)}{\cos(\theta_{k+1})} \ , \tag{3.136}$$

l'opérateur d'évolution est écrit sous la forme suivante :

$$U = \frac{e^{-i(\eta_1 - \Omega_1)T}}{2\cos(\theta_{k+1})} \begin{pmatrix} -2\sin^2\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) & 2\sin\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) \\ -2\sin\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) & 2\cos^2\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$+\frac{e^{-i(\eta_1 + \Omega_1)T}}{2\cos(\theta_{k+1})} \begin{pmatrix} 2\cos^2\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) & -2\sin\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) \\ 2\sin\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) & -2\sin^2\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$
= \frac{e^{-i(\eta_1-\Omega_1)T}}{\cos(\theta_{k+1})}\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) \end{pmatrix}
$$

$$
+\frac{e^{-i(\eta_1+\Omega_1)T}}{\cos(\theta_{k+1})}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) \end{pmatrix}, \tag{3.137}
$$

on a :

$$
U = e^{-iHT} = \sum \left(e^{-iE^{+}T}\left|\Psi_1\right\rangle\left\langle\Gamma_1\right| + e^{-iE^{-}T}\left|\Psi_2\right\rangle\left\langle\Gamma_2\right|\right), \tag{3.138}
$$

les résultat est :

$$
\left|\Psi_1\right\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) \end{pmatrix}, \left|\Gamma_1\right\rangle = \frac{1}{\cos(\theta_{k+1})}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) \end{pmatrix}, \tag{3.139}
$$

$$
\left|\Psi_2\right\rangle = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) \end{pmatrix}; \left|\Gamma_2\right\rangle = \frac{1}{\cos(\theta_{k+1})}\begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta_{k+1}}{2}\right) \end{pmatrix}, \tag{3.140}
$$

$$
E_k^{\pm} = \eta_1 \pm \Omega_1 = \eta_1 \pm \sqrt{\frac{\Delta_1^2}{4} - \omega_{01}^2}, \tag{3.141}
$$

si la condition est vérifiée :

$$
|\omega - \varepsilon + 2\chi(k+2)| \prec 2\rho\sqrt{k+1}, \tag{3.142}
$$

donc on a :

$$
E^{\pm} = \eta_1 \pm \sqrt{-\left(\omega_{01}^2 - \frac{\Delta_1^2}{4}\right)} = \eta_1 \pm \sqrt{(i)^2\left(\omega_{01}^2 - \frac{\Delta_1^2}{4}\right)} = \eta_1 \pm i\sqrt{\left(\omega_{01}^2 - \frac{\Delta_1^2}{4}\right)}. \tag{3.143}
$$

Les résultats coïncident avec ceux obtenus dans la réf [27]au moyen de la formulation de l'opérateur de mécanique quantique pseudo-hermitienne.

Conclusion générale

Dans cette thése, nous avons utilisé le formalisme de l'intégral du chemin dans les espaces de configuration et de phases pour résoudre, avec une démarche claire et simple, quelques problémes de la mécanique quantique non relativiste. Les résultats obtenus sont comparés à ceux calculés dans le cadre de la mécanique quantique et de l'optique quantique tel un atome à deux niveaux en intéraction avec une onde électromagnétique classique de polarisation circulaire et le modèle de Jaynes Cummings avec une cavité non linéaire de Kerr.

-Les matrices de Pauli $\overrightarrow{\sigma}$ représentants les deux niveaux de l'atome ont été remplacées par un vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ orienté suivant les angles polaires (θ, φ) et le calcul a nécessité l'introduction des états cohérents relatifs aux spin, nous avont pu élaboré un formalisme intégrale du chemin en représentation les états cohérents du spin .

-Le calcul est basé sur l'amplitude de transition qui a été exprimée d'abord sous la forme standard $\int \mathcal{D}(path) \exp \frac{i}{\hbar} S(path)$, telle que formulée par Feynman, ou' $S = \int Ldt$ est l'action décrivant les mouvements extérieurs (centre de masse) et intérieur de l'atome.

-Le problème essentiel rencontré dans cette thèse à travers les deux exemples traités est le calcul d'intégrale. Il est parfois plus commode de travailler dans l'espace des phases ce qui permet de simplifier les calculs via certaines transformations. Les fonctions d'onde et le spectre correspondants ont été déduits en appliquant le principes de la mécanique quantique.

-La théorie de fayman éprouve l'efficacité par apport aux autres théorèmes , puisque elle a trouvé les mêmes résultats de l'équation de Schr$\ddot{o}$dinger .

-Les matrices de Pauli représentent les niveaux d'énergie de l'atome .

-Grace aux deux variables (θ, φ) qui remplace le spin, le propagateur a une écriture première sous forme standard en remplaçant la rotation par un vecteur d'unité aligné le long des directions polaires et azimutal .

-Dans le chapitre ''2", pour déterminer la solution exacte ,on a utilisé deux méthodes ,mais la deuxième méthode est la plus simple par apport la première méthode .

Le propagateur dans le système est donné sous forme de série , pour ce cas , on a utilisé la théorème de perturbation et la transformation de Laplace pour trouver la solution exacte .

-Dans le chapitre" 3", nous avons étudié par le formalisme des intégrals du chemin , le modèle de Jaynes Cummings avec une cavité non linéaire de Kerr. La représentation des états $|\theta, \varphi\rangle$ qui utilisent les angles et les états cohérents $|Z\rangle$ pour décrire le champs quantifieé a été utilisé .

-D'après cette étude, nous avons constaté que les intégrals du chemin ont permis de résoudre quelques problèmes de la mécanique quantique malgré ses difficultés .

Bibliographie

[1] R. P. Feynman, A. R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path integrals, (McGraw-Hill, New York

[2] H. Kleinert, Path Integrals in Quantum mechanics, Statistics and polymer Physics (Word Scientific,Singapor, 1990).

[3] C. Grosche and F. Steiner, Handbook of Feynman Path Integrals, (Springer-Verlag Berlin 1998).

[4] J. Schwinger, Quantum Theory of angular Momentum,edited by L.Biedenharn and H.von Dam(Academic Press, New York, 1965).

[5] Coherent states, edited by J. R. Klauder and B. Skagerstam(Word Scientific, Singapore, 1985).

[6] T. Boudjedaa, A..Bounames, L. Chetouani, T. F. Hammann, J. Math.Phys.36,1602 (1995).

Kh. Nouicer, L. Chetouani, Phys. Lett. A 281, 218 (2001).

Merdaci, T. Boudjedaa and L. Chetouani, Phys. Scrip. 64, 19 (2001).

Merdaci, T. Boudjedaa and L. Chetouani, Czech. J. Phys. 51, 865 (2001).

[7] A. Alscher, H. Grabert, J. Phys. A. 32, 4907 (1999).

[8] M. Aouachria, Sciences et Technologie-N018, 19 (2002).

[9] Gao-Jian, Shi-Lun Zhou, Sheng-Mei Ao, Zhao-Yang Zeng, Phys. Rev. A 55, 2945 (1997).

[10] M. Aouachria, L. Chetouani, Chinese. J. Phys. 40, 496 (2002). M. Aouachria, Chinese. J. Phys 496 (2011).

[11] Z. Y. Zeng, G. J. Zeng, L. M. Kuang, L. D. Zhang, Phys. Lett. A 261, 316 (1999).

[12] V. Buzek and I. Jex, Opt. Commun. 78, 425 (1990). A. Joshi, S. V. Lawande, Phys. Rev. A 48, 2276 (1993). A. Joshi, R. R. Puri, Phys. Rev. A 45, 5056 (1992).

[13] F. Steiner. DESY Preprint, DESY 87-146, October (1987).

[14] A. M. Perelomov, Generalized Coherent states and Their Application (Springe-Verlag, Berlin, 1986), A. M. Perelomov, Commun. Math. Phys. 26, 22 (1972).

[15] J. Klauder, Ann. Phys. (NY)11, 123 (1960).

[16] Y. Ohnuki and T. Kashiwa, Prog. Theor. Phys. 60, 548 (1978).

[17] J. R. Klauder, Phys. Rev. D 19, 2349 (1979).

[18] A. Inomata, H. Kuratsuji, C.C. Gerry Path Integrals Mathodes and their Applications (Word Scientific, Singapore, 1992).

[19] Klauder, J.R. : Ann. Phys.11, 123 (1960).

[20] Ohnuki, Y., Kashiwa, T. : Prog. Theor. Phys.60, 548 (1978).

[21] Aouachria, M., Halimi, F. : J. Phys. Conf. Ser.435, 012025 (2013).

[22] Zeng G J, Zhou S L, Ao S M and Zeng Z Y 1997 Phys. Rev. A 55 2945

[23] Zeng Z Y, Zeng G J, Kuang L M and Zhang L D 1999 Phys. Lett. A 261 316.

[24] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, Proc. IEEE 51, 89 (1963).

[25] T. Boudjedaa, A. Bounames, Kh. Nouicer, L. Chetouani, T. F. Hammann, Phys. Scr. 54, 225(1996).

[26] M. Aouachria, L. Chetouani, Can. J. Phys. 87, 389 (2009).

[27] Bhabani Prasad Mandal ,Department of Physics, Banaras Hindu University,Varanasi-221005, India.

Annexe
Articles publies

Exact Spin Coherent State Path Integral for a Damped Two-Level Atom in an Electromagnetic Wave

Farida Halimi & Mekki Aouachria

International Journal of Theoretical Physics

ISSN 0020-7748
Volume 52
Number 10

Int J Theor Phys (2013) 52:3662-3675
DOI 10.1007/s10773-013-1672-6

Int J Theor Phys (2013) 52:3662–3675
DOI 10.1007/s10773-013-1672-6

Exact Spin Coherent State Path Integral for a Damped Two-Level Atom in an Electromagnetic Wave

Farida Halimi · Mekki Aouachria

Received: 19 March 2013 / Accepted: 28 May 2013 / Published online: 12 June 2013

Abstract The spin coherent state path integral describing the dynamics of a two-level system interacting with electromagnetic wave of circular polarization is considered. The propagator is first written in the standard form by replacing the spin by a unit vector aligned along the polar and azimuthal directions. Then it is determined exactly using a simple transformations. Thus, the exact energy spectra with corresponding wave functions are deduced.

Keywords Path integral · Propagator · Spin coherent state · Two level system

1 Introduction

The applications of path-integral formalism have widely increased since a large class of potentials had been resolved [1]. However it is known that the most relativistic interactions are those where the spin, which is a very useful and very important notion in physics, is taken into account. In the framework of non-relativistic theory the phenomena of spin is automatically introduced by the Pauli equation which contains the Schrödinger Hamiltonian and a spin-field interaction. This motivates the research into the solvable Pauli equations which is inevitably useful in applied physics. For instance a well-known example of its direct application is the time-dependent field acting on an atom with two levels whose time-evolution is controlled by the Pauli-type equation. The solution for this equation has made clear the associated transition amplitudes [2]. This and similar [3, 4] types of interaction aside, there are little analytical and exact computations which treat the time-dependent spin-field interaction. Furthermore, if one replaces the time dependence of the exterior field by a space-time dependence or by only space dependence this becomes even more restrictive [5–10].

Moreover, the problem becomes nearly unsolvable if we try to build these solutions by the path integral formalism because the spin is a discrete quantity. The difficulty here is

F. Halimi · M. Aouachria (✉)
Laboratoire de Physique Energétique Appliquée (LPEA), Département des Sciences de la Matière, Faculté des Sciences, Université Hadj Lakhdar, Batna, Algeria
e-mail: mekkiaouachria@yahoo.fr

associated to the fact that the path integral lacks some classical ideas such as trajectories and up to now one does not know how to deal with this kind of technique in this important case. Thus some effort has been made to find a partial solution using the Schwinger's model of spin and some explicit computations are then carried out [11–17].

A different model for spin is the use of the spin coherent state path integral which turns out to be helpful in visualizing the quantum dynamics in terms of classical ideas, and to our knowledge few explicit and semiclassical calculations are carried out [18–20]. If on the other hand the time-dependence of the exterior field is replaced by space-time dependence or space dependence, to our knowledge, the exact solution in these cases using spin coherent state path integral are very rare [21–24]. The aim of this paper is to give an attempt for the case below where we present an explicit spin coherent state path integral. For this reason we are devoted to this type of interaction by considering a problem which has recently been treated according to usual quantum mechanics [25]. It acts on an atom which has two levels and which interacts with electromagnetic wave of circular polarization. The same problem has been considered with damping in Ref. [26].

The purpose of this article is to deal with the same problem using the formalism of spin coherent path integral. The two-level atom with a mass m and an angular frequency ω has a dipole moment $\mathbf{D}$. The electromagnetic wave has wave vector k and angular frequency ω_L, propagating along the z-axis, and is described by the electric field

$$\mathbf{E} = \big(A\cos(\omega_L t - kz), -A\sin(\omega_L t - kz), 0\big), \tag{1}$$

where A is the amplitude of $\mathbf{E}$. The dynamics of the atom in interaction with the electromagnetic wave is described by the following Hamiltonian:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z - \frac{i\hbar}{2}\begin{pmatrix}\gamma_1 & 0\\ 0 & \gamma_2\end{pmatrix} + \mathbf{V}, \tag{2}$$

where

- the first term represents the kinetic energy associated with the center–of–mass momentum along the z-direction,
- the second and the third terms describe the internal movement of the atom with, $\gamma_1 = \frac{1}{\tau_1}$ and $\gamma_2 = \frac{1}{\tau_2}$, being the lifetimes of the two atomic levels,
- $\mathbf{V}$ is the interaction energy between the atom and electromagnetic wave represented in the dipole approximation by

$$\mathbf{V} = -\mathbf{DE} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\hbar\Omega e^{-i(\omega_L t - kz)}\\ -\frac{1}{2}\hbar\Omega e^{i(\omega_L t - kz)} & 0\end{pmatrix}, \tag{3}$$

where $DA = \frac{1}{2}\hbar\Omega$.

The Hamiltonian related to our problem has the following form

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_{int}\\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\hbar\left(\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right)\sigma_z - \frac{i\hbar\gamma_+}{4}\mathbf{I}\\ &\quad - \frac{1}{2}\hbar\Omega e^{-i(\omega_L t - kz)}\sigma_+ - \frac{1}{2}\hbar\Omega e^{i(\omega_L t - kz)}\sigma_-, \end{aligned} \tag{4}$$

where

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

are the usual Pauli matrices.

Considering this problem by the path integral approach, our motivation is the following. We show that for interaction with the coupling of spin-field type, the propagator is first written in the standard form $\sum_{\text{path}} \exp(iS(\text{path})/\hbar)$, where S is the action that describes the system, and the discrete variable relative to spin being inserted as the (continuous) path using spin coherent states. With this approach, the formulation that uses the concept of trajectory is more suitable for a discussion of the semiclassical case which is based on the determination of classical paths. Then we show that for this interaction, the propagator is exactly calculable and the wave functions and the energy spectrum can be extracted.

We note that this problem has been recently studied using fermionic coherent state path integral [27, 28], where the authors use the Schulman–Langhlin procedure to estimate and replace the $(\Delta z_n)^2$ terms present in the action by $i\varepsilon\hbar/m$, which is translated into an effective potential. In contrary, in this article, we avoid this procedure and the effective potential naturally arises in the calculation, which is also another motivation for using the spin coherent state path integral formalism. The difference between the two approaches stems simply from the difference between the two distinct coherent states.

Our paper is organized as follows. In the next section we give some notation and the spin coherent state path integral for spin $\frac{1}{2}$ system for our further computations. In Sect. 3, after setting up a path integral formalism for the propagator, we perform the direct calculations. To integrate over the variable of the exterior motion we introduce a particular rotation in spin-coherent state space which eliminates the phase of the electromagnetic field, then we linearise the kinetic energy term using the phase space. Consequently the effective potential $i\varepsilon\hbar/m$ naturally arises, and then we integrate over z. Accordingly, the integration over the spin variables is easy to carry out, through simple transformations. The explicit result of the propagator is directly computed and the wave function is then deduced. Finally, in Sect. 4, we present our conclusions.

2 Path-Integral Formulation

There are several ways to represent the spin in the path integral formalism [29–31]. We use the simplest way [19, 32] which consists of:

- replacing σ by a unit vector $\mathbf{n}$ directed along (θ, φ),
- associating a coherent state $|\Omega\rangle$

$$|\Omega\rangle = |\theta, \varphi\rangle = e^{-i\varphi S_z} e^{-i\theta S_y} |\uparrow\rangle, \tag{6}$$

  obtained from two rotations of the angles θ and ϕ around z and y axes over the state $|\uparrow\rangle$, and whose scalar product and projector are respectively:

$$\langle \Omega | \Omega' \rangle = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2} e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int d\cos(\theta) d\varphi |\Omega\rangle\langle\Omega| = \mathbf{I}. \tag{8}$$

We label by z the real variable that describes the atom position, with the corresponding projector

$$\int |z\rangle\langle z|dz = 1, \tag{9}$$

and (θ, φ) the polar variables generating the dynamics of the spin.

The transition amplitude from the initial state $|z_i, \theta_i, \varphi_i\rangle$ at $t_i = 0$ to the final state $|z_f, \theta_f, \varphi_f\rangle$ at $t_f = T$ is given by the matrix elements of the time evolution operator

$$K(z_f, \Omega_f, z_i, \Omega_i; T) = \langle z_f, \theta_f, \varphi_f \mid \mathbf{T}_D \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T H dt\right) \mid z_i, \theta_i, \varphi_i\rangle, \tag{10}$$

where $\mathbf{T}_D$ is Dyson's time ordering symbol.

Discretizing the time $\varepsilon = T/(N+1)$, using the Trotter formula and inserting N-times the resolution of unity (8) and (9) between each pair of the evolution operator at time ε, we obtain the discretized form of the transition amplitude

$$\begin{aligned} K(z_f, \Omega_f, z_i, \Omega_i; T) = \lim_{N\longrightarrow\infty} (m/2\pi i\hbar\varepsilon)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^{n=N} dz_n \prod_{n=1}^{N+1} \\ \times \exp\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(z_n - z_{n-1})^2 K^z(\Omega_f, \Omega_i; T), \end{aligned} \tag{11}$$

with

$$\begin{aligned} K^z(\Omega_f, \Omega_i; T) = \lim_{N\longrightarrow\infty} \int \prod_{n=1}^{N} \frac{d\cos(\theta_n)d\varphi_n}{2\pi} \\ \times \prod_{n=1}^{N+1}\left[\langle\Omega_n \mid \Omega_{n-1}\rangle - i\varepsilon\langle\Omega_n|H_{int}|\Omega_{n-1}\rangle\right], \end{aligned} \tag{12}$$

where

$$z_{N+1} = z_f, \quad \Omega_{N+1} = \Omega_f \quad \text{and} \quad z_0 = z_i, \quad \Omega_0 = \Omega_i. \tag{13}$$

It is easy to find that the following matrix elements:

$$\langle\Omega|\sigma_z|\Omega'\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}, \tag{14}$$

$$\langle\Omega|\sigma_+|\Omega'\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{+\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}, \tag{15}$$

$$\langle\Omega|\sigma_-|\Omega'\rangle = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}, \tag{16}$$

and the propagator related to our problem (11) takes the form of Feynman path integral

$$K = \int D\text{path}\exp(i\text{Action}), \tag{17}$$

which means in our case:

$$
\begin{aligned}
&K(z_f, \Omega_f, z_i, \Omega_i; T) \\
&\quad = \lim_{N\longrightarrow\infty} (m/2\pi i\hbar\varepsilon)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^{n=N} dz_n \prod_{n=1}^{N+1} \exp \frac{im}{2\hbar\varepsilon}(z_n - z_{n-1})^2 \\
&\qquad \times \int \prod_{n=1}^{N} \frac{d\cos(\theta_n) d\varphi_n}{2\pi} \exp\left\{ \sum_{n=1}^{n=N+1} \left[\log < \Omega_n | \Omega_{n-1}\rangle - i\varepsilon \frac{\langle \Omega_n | H_{int} | \Omega_{n-1}\rangle}{< \Omega_n | \Omega_{n-1}\rangle} \right] \right\}. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Having obtained the conventional form it remains to integrate it in order to extract the interesting physical properties. We thus proceed to the calculation of $K(z_f, \Omega_f, z_i, \Omega_i; T)$.

3 The Calculation of the Propagator

We note that (18) can be rewritten in the form

$$
\begin{aligned}
&K(z_f, \Omega_f, z_i, \Omega_i; T) \\
&\quad = \lim_{N\longrightarrow\infty} (m/2\pi i\hbar\varepsilon)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^{n=N} dz_n \prod_{n=1}^{N+1} \\
&\qquad \times e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \exp \frac{im}{2\hbar\varepsilon}(z_n - z_{n-1})^2 \lim_{N\longrightarrow\infty} \int \prod_{n=1}^{N} \frac{d\cos(\theta_n) d\varphi_n}{2\pi} \\
&\qquad \times \prod_{n=1}^{N+1} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_n} & \sin\frac{\theta_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_n} \end{pmatrix} R(z_n, t_n) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}} \\ \sin\frac{\theta_{n-1}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}} \end{pmatrix}, \qquad (19)
\end{aligned}
$$

with

$$
R(z_n, t_n) = \begin{pmatrix} 1 - i\varepsilon\frac{1}{2}(\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2}) & i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega e^{-i(\omega_L t_n - kz_n)} \\ i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega e^{i(\omega_L t_{n-1} - kz_{n-1})} & 1 + i\varepsilon\frac{1}{2}(\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2}) \end{pmatrix}. \qquad (20)
$$

To integrate it is necessary to first eliminate the inconvenient terms $e^{-i(\omega_L t_n - kz_n)}$ and $e^{i(\omega_L t_{n-1} - kz_{n-1})}$ with the help of the following change of variable:

$$
\varphi_n = \varphi'_n + \omega_L t_n - kz_n. \qquad (21)
$$

Then, the measure

$$
\prod_{n=1}^{N} \frac{d\cos(\theta_n) d\varphi_n}{2\pi} = \prod_{n=1}^{N} \frac{d\cos(\theta_n) d\varphi'_n}{2\pi}, \qquad (22)
$$

remains unchanged. The expression (19) becomes

$$
\begin{aligned}
&K\left(z_f, \Omega'_f, z_i, \Omega'_i; T\right) \\
&\quad = \lim_{N\longrightarrow\infty} (m/2\pi i\hbar\varepsilon)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^{n=N} dz_n \prod_{n=1}^{N+1}
\end{aligned}
$$

$$\times e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \exp \frac{im}{2\hbar\varepsilon}(z_n - z_{n-1})^2 \lim_{N\longrightarrow\infty} \int \prod_{n=1}^{N} \frac{d\cos(\theta_n) d\varphi_n'}{2\pi}$$
$$\times \prod_{n=1}^{N+1} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_n'} & \sin\frac{\theta_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_n'} \end{pmatrix} R_1(z_n, t_n) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}'} \\ \sin\frac{\theta_{n-1}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}'} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

where

$$R_1(z_n, t_n) = \begin{pmatrix} 1 - i\varepsilon\frac{1}{2}(\Delta\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2})e^{-i\frac{k}{2}\Delta z_n} & i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega \\ i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega & 1 + i\varepsilon\frac{1}{2}(\Delta\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2})e^{+i\frac{k}{2}\Delta z_n} \end{pmatrix} \tag{24}$$

and $\Delta\omega = \omega - \omega_L$

Then we use the following identity:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{-i\varepsilon}{2m\hbar} p_n^2 + \frac{i}{\hbar} p_n \left(\Delta z_n \pm \frac{\varepsilon\hbar}{2m} k\right)\right]$$
$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar}} \exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar}\left(\Delta z_n \pm \frac{\varepsilon\hbar}{2m} k\right)^2\right]. \tag{25}$$

Thus the propagator (23) can be rewritten as:

$$K\left(z_f, \Omega_f', z_i, \Omega_i'; T\right)$$
$$= \lim_{N\longrightarrow\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{n=1}^{n=N} dz_n \prod_{n=1}^{n=N+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{-\frac{T\gamma_+}{4}}$$
$$\times \exp \sum_{n=1}^{n=N+1} \left[\frac{-i\varepsilon}{2m\hbar} p_n^2 + \frac{i}{\hbar} p_n \Delta z_n - i\frac{\varepsilon\hbar}{8m} k^2\right] \lim_{N\longrightarrow\infty} \int \prod_{n=1}^{N} \frac{d\cos(\theta_n) d\varphi_n'}{2\pi} \prod_{n=1}^{N+1}$$
$$\times \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_n'}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_n'} & \sin\frac{\theta_n'}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_n'} \end{pmatrix} R_2(z_n, t_n) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_{n-1}'}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}'} \\ \sin\frac{\theta_{n-1}'}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}'} \end{pmatrix}, \tag{26}$$

where

$$R_2(p_n, t_n) = \begin{pmatrix} 1 - i\varepsilon(\frac{1}{2}(\Delta\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2}) + \frac{p_n k}{2m}) & i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega \\ i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega & 1 + i\varepsilon(\frac{1}{2}(\Delta\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2}) + \frac{p_n k}{2m}) \end{pmatrix}. \tag{27}$$

By integrating over the N variables z_n, we clearly get Dirac functions $\delta(\dot{p})$ which reflects the conservation of the atom impulsion during the movement, i.e:

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_{N+1} = p. \tag{28}$$

Hence the propagator (25) takes the following form

$$K\left(z_f, \Omega_f', z_i, \Omega_i'; T\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar} p(z_f - z_i) - \frac{iTp^2}{2m\hbar} - iT\frac{\hbar k^2}{8m}\right]$$

$$\times e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \lim_{N\longrightarrow\infty} \int \prod_{n=1}^{N} \frac{d\cos(\theta_n) d\varphi'_n}{2\pi}$$
$$\times \prod_{n=1}^{N+1} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta'_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi'_n} & \sin\frac{\theta'_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n} \end{pmatrix} R_2(p, t_n) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta'_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}} \\ \sin\frac{\theta'_{n-1}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}} \end{pmatrix}, \tag{29}$$

where

$$R_2(p, t_n) = \begin{pmatrix} 1 - i\varepsilon(\frac{1}{2}(\Delta\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2}) + \frac{pk}{2m}) & i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega \\ i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega & 1 + i\varepsilon(\frac{1}{2}(\Delta\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2}) + \frac{pk}{2m}) \end{pmatrix}. \tag{30}$$

At this stage, let us notice that the integration over θ_n and φ'_n can be done through two methods,

3.1 First Method

The first one, which investigated in the previous work [33] where we have carried out the integration over the angular variables as a perturbation series. For this let us integrate on the angular variables θ_n and φ'_n, thus the propagator takes the following form

$$K(f, i; T) = e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar} p(z_f - z_i) - \frac{iTp^2}{2m\hbar} - iT\frac{\hbar k^2}{8m}\right]$$
$$\times \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_f}{2} e^{\frac{i\varphi'_f}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2} e^{-\frac{i\varphi'_f}{2}} \end{pmatrix} R(p, T) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_i}{2} e^{-\frac{i\varphi'_i}{2}} \\ \sin\frac{\theta_i}{2} e^{\frac{i\varphi'_i}{2}} \end{pmatrix} \tag{31}$$

with

$$R(p, T) = \lim_{N\longrightarrow\infty} (-1)^N \prod_{\underleftarrow{n=1}}^{n=N+1} R_2(p, t_n). \tag{32}$$

The arrow under the product symbol indicates the time ordering operation. We concentrate on the evaluation of the matrix elements $R_{ij}(p, T)$. To this aim the matrix $R(p, t_n)$ is written as a sum of a diagonal matrix and an off-diagonal matrix. To first order in ε we have

$$R(p, t_n) = e^{-i\varepsilon\omega(j)\sigma_z} + i\varepsilon K(n), \tag{33}$$

where the off-diagonal matrix is given by

$$K(n) = \begin{pmatrix} 0 & u(n) \\ u(n) & 0 \end{pmatrix}, \tag{34}$$

with

$$\omega(n) = \frac{1}{2}\left(\Delta\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right) + \frac{kp}{2m}, \quad \text{and} \quad u(n) = \frac{\Omega}{2}, \tag{35}$$

let us pass to the calculation of produce matrix according to [11]

$$\prod_{n=1}^{N}\left(e^{-i\varepsilon\omega(n)\sigma_z}+i\varepsilon K(n)\right)$$
$$= e^{-i\sum_{j=1}^{N}\varepsilon\omega(j)\sigma_z}+\sum_{l=1}^{N}(i\varepsilon)e^{-i\sum_{l+1}^{N}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l)e^{-i\sum_{1}^{l-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}$$
$$+\sum_{l_1=1}^{N}\sum_{l_2=1}^{l_1-1}(i\varepsilon)^2 e^{-i\sum_{l_1+1}^{N}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_1)e^{-i\sum_{l_2+1}^{l_1-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_2)e^{-i\sum_{1}^{l_1-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}+\cdots$$
$$+\sum_{l_1=1}^{N}\sum_{l_2=1}^{l_1-1}\sum_{l_3=1}^{l_2-1}\cdots\sum_{l_{N-1}=1}^{l_{N-2}-1}\sum_{l_N=1}^{l_{N-1}-1}(i\varepsilon)^N e^{-i\sum_{l_1+1}^{N}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_1)e^{-i\sum_{l_2+1}^{l_1-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_2)$$
$$\times e^{-i\sum_{l_3+1}^{l_2-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}\cdots e^{-i\sum_{l_{N-1}+1}^{l_{N-2}-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_{N-1})e^{-i\sum_{l_N+1}^{l_{N-1}-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_N)e^{-i\sum_{1}^{l_N-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}. \tag{36}$$

Taking the limit $N \longrightarrow +\infty$ of (36) leads to

$$R(p,T)=e^{-i\int_0^T ds\omega(p,s)\sigma_z}+i\int_0^T ds_1 e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_1)e^{-i\int_0^{s_1}ds\omega(p,s)\sigma_z}$$
$$+(i)^2\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2 e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_1)e^{-i\int_{s_2}^{s_1}ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_2)$$
$$+\cdots(i)^N\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2\int_0^{s_2}ds_3\cdots\int_0^{s_{N-1}}ds_N e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_1)$$
$$\times e^{-i\int_{s_2}^{s_1}ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_2)\cdots K(s_{N-1})e^{-i\int_{s_N}^{s_{N-1}}ds\omega(p,s)\sigma_z}$$
$$\times K(s_N)e^{-i\int_0^{s_N}ds\omega(p,s)\sigma_z}+\cdots \tag{37}$$

a simple calculation shows us that the terms odd respectively even are the element antidiagonaux respectively diagonal of R.

$$R_{11}(p,T)=e^{-i\int_0^T ds\omega(p,s)}+\sum_{n=1}^{\infty}i^{2n}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1}ds_2\int_0^{s_2}ds_3\cdots\int_0^{s_{2n-1}}ds_{2n}$$
$$\times e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)}u\big(p(s_1),s_1\big)e^{+i\int_{s_2}^{s_1}ds\omega(p,s)}u\big(p(s_2),s_2\big)$$
$$\times\cdots e^{+i\int_{s_{2n}}^{s_{2n-1}}ds\omega(p,s)}u\big(p(s_{2n}),s_{2n}\big)e^{-i\int_0^{s_{2n}}ds\omega(p,s)} \tag{38}$$

and

$$R_{12}(p,T)=i\int_0^T ds_1 e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)}u\big(p(s_1),s_1\big)R_{22}\big(p(s_1),s_1\big), \tag{39}$$

$$\begin{aligned} R_{22}(p,T)&=R_{11}^*(p,T),\\ R_{21}(p,T)&=-R_{12}^*(p,T). \end{aligned} \tag{40}$$

For instance

$$R_{11}(p,T)=\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(i\frac{\Omega}{2}\right)^{2n}\int_0^T e^{i\Delta s_1}ds_1\int_0^{s_1}e^{-i\Delta s_2}ds_2\cdots\int_0^{s_{2n-1}}e^{-i\Delta s_{2n}}ds_{2n}\right]e^{-i\frac{T\Delta}{2}}, \tag{41}$$

with

$$\Delta = 2\omega(n,s), \tag{42}$$

$$\omega(n,s)=\frac{\Delta\omega}{2}-\frac{i\gamma_-}{4}+\frac{kp}{2m}. \tag{43}$$

Let us put

$$F(0,T)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(i\frac{\Omega}{2}\right)^{2n}\int_0^T e^{i\Delta s_1}ds_1\int_0^{s_1}e^{-i\Delta s_2}ds_2\cdots\int_0^{s_{2n-1}}e^{-i\Delta s_{2n}}ds_{2n} \tag{44}$$

The evaluation of this multiple integral which has the form of a repeated convolution product, proceeds by taking the Laplace transform of all functions with respect to the time differences in their arguments and using the convolution theorem of Laplace transform [11]. The result is

$$\widetilde{F}(0,q)=\int_0^{+\infty}dTe^{-qT}F(0,T)dT=\frac{1}{q}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-\Omega^2/4}{q(q-i\Delta)}\right]^n \tag{45}$$

the sum over N is carried out with the result

$$\widetilde{F}(0,q)=\frac{q-i\Delta}{q(q-i\Delta)+\frac{\Omega^2}{4}}-\frac{1}{q} \tag{46}$$

this result is valid for $\mid\frac{(i\frac{\Omega}{2})^2}{q(q-i\Delta)}\mid<1$. We notice that is possible to get a contour of the inverse Laplace integration where the condition above is verified. Taking the inverse Laplace transform we obtain for the element $R_{11}(p,T)$ the expression

$$R_{11}(p,T)=\cos\bigl(\Omega' T\bigr)-\frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin\bigl(\Omega' T\bigr),\quad \text{with } \Omega'=\sqrt{\frac{\Delta^2}{4}+\frac{\Omega^2}{4}} \tag{47}$$

Following the same method of calculations, the remaining elements are calculated and listed below

$$R_{12}(p,T)=\frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin\bigl(\Omega' T\bigr), \tag{48}$$

$$R_{21}(p,T)=\frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin\bigl(\Omega' T\bigr), \tag{49}$$

$$R_{22}(p,T)=\cos\bigl(\Omega' T\bigr)+\frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin\bigl(\Omega' T\bigr). \tag{50}$$

Substitutions this result in (31) the propagator takes finally the from:

$$K(f,i;T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar}-\frac{i\hbar k^2T}{8m}+\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)\right]$$
$$\times\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i\varphi'_f}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i\varphi'_f}{2}}\end{pmatrix}R(p,T)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i\varphi'_i}{2}}\\ \sin\frac{\theta_i}{2}\exp(+\frac{i\varphi'_i}{2})\end{pmatrix},\tag{51}$$

with

$$R(p,T)=\begin{pmatrix}\cos(\Omega'T)-\frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin(\Omega'T) & -\frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin(\Omega'T)\\ -\frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin(\Omega'T) & \cos(\Omega'T)+\frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin(\Omega'T)\end{pmatrix}.\tag{52}$$

Now we come back to the old angulars variables (θ,φ). So, the exact expression of the propagator concerning to our problem is the following

$$K(f,i;T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar}-\frac{i\hbar k^2T}{8m}+\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)\right]e^{-\frac{T\gamma_+}{4}}$$
$$\cdot\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i\varphi_f}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i\varphi_f}{2}}\end{pmatrix}\mathbf{S}(p,T)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i\varphi_i}{2}}\\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{+\frac{i\varphi_i}{2}}\end{pmatrix},\tag{53}$$

Where the elements of matrix $\mathbf{S}(p,T)$ is given by:

$$\mathbf{S}_{11}(p,T)=\left[\cos\Omega'T-\frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin\Omega'T\right]e^{-\frac{T\gamma_+}{4}}\exp\frac{i}{2}(kz_f-\omega_LT-kz_i),\tag{54}$$

$$\mathbf{S}_{22}(p,T)=\left[\cos\Omega'T+\frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin\Omega'T\right]e^{-\frac{T\gamma_+}{4}}\exp-\frac{i}{2}(kz_f-\omega_LT-kz_i),\tag{55}$$

$$\mathbf{S}_{12}(p,T)=-\frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin\Omega'Te^{-\frac{T\gamma_+}{4}}\exp\frac{i}{2}(kz_f-\omega_LT+kz_i),\tag{56}$$

$$\mathbf{S}_{21}(p,T)=-\frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin\Omega'Te^{-\frac{T\gamma_+}{4}}\exp-\frac{i}{2}(kz_f-\omega_LT+kz_i).\tag{57}$$

The angles θ, φ are allowed to vary only in the limited domains $[0,2\pi]$ and $[0,4\pi]$. Our propagator is the following:

$$\begin{aligned}K(f,i;T)&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}K(z_f,\theta_f+2n\pi,z_i,\varphi_f+4n\pi,\quad\theta_i,\varphi_i;T)\\&=K(z_f,\Omega_f,z_i,\Omega_i;T)\end{aligned}\tag{58}$$

It is an expression for the propagator in the spin coherent state representation.

3.2 Second Method

In this second one we would like to apply the method in which we will introduce some transformation in order to simplify the form of the matrix $R_2(p,t_n)$. For this aim, let us first take the following shift.

$$p\to p+\frac{\hbar k}{2},\tag{59}$$

the propagator takes the adequate form

$$
\begin{aligned}
&K\left(z_f,\Omega'_f,z_i,\Omega'_i;T\right)\\
&\quad=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p+\frac{\hbar k}{2}\right)(z_f-z_i)-\frac{iTp^2}{2m\hbar}-i\frac{\Delta e_p}{2\hbar}T\right]e^{-\frac{T\gamma_+}{4}}\\
&\qquad\times\lim_{N\longrightarrow\infty}\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d\cos(\theta_n)d\varphi'_n}{2\pi}\prod_{n=1}^{N+1}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_n}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi'_n} & \sin\frac{\theta_n}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n}\end{pmatrix}\\
&\qquad\times R_3(p,t_n)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}}\\ \sin\frac{\theta_{n-1}}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}}\end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{60}
$$

where

$$
\begin{aligned}
&R_3(p,t_n)=1-i\varepsilon\left[\left[\frac{1}{2}\left(\Delta\omega-\frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right)+\frac{\Delta e_p}{2\hbar}\right]\sigma_z-\frac{\Omega}{2}\sigma_x\right],\quad\text{and}\\
&\Delta e_p=\frac{(p+\hbar k)^2}{2m}-\frac{p^2}{2m},
\end{aligned}
\tag{61}
$$

then we introduce new angular variables via a unitary transformation defined by

$$
\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_n}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n}\\ \sin\frac{\theta_n}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi'_n}\end{pmatrix}=e^{i\frac{\alpha}{2}\sigma_y}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta'_n}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi''_n}\\ \sin\frac{\theta'_n}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi''_n}\end{pmatrix}
\tag{62}
$$

The role of this unitary transformation is to diagonalize the matrix $R_3(p,t_n)$. Where we have put

$$
\sin\alpha=\frac{\hbar\Omega}{\sqrt{(\hbar\Omega)^2+(\hbar\Delta\omega-\frac{i\hbar\gamma_-}{2}+\Delta e_p)^2}}
\tag{63}
$$

then the propagator take the form

$$
\begin{aligned}
&K\left(z_f,\Omega'_f,z_i,\Omega'_i;T\right)\\
&\quad=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p+\frac{\hbar k}{2}\right)(z_f-z_i)-\frac{iTp^2}{2m\hbar}-i\frac{\Delta e_p}{2\hbar}T\right]e^{-\frac{T\gamma_+}{4}}\\
&\qquad\times\lim_{N\longrightarrow\infty}\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d\cos(\theta'_n)d\varphi''}{2\pi}\prod_{n=1}^{N+1}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta'_n}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi''} & \sin\frac{\theta'_n}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi''}\end{pmatrix}\\
&\qquad\times R_4(p,t_n)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta'_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi''}\\ \sin\frac{\theta'_{n-1}}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi''}\end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{64}
$$

where

$$
R_4(p,t_n)=e^{-i\varepsilon\frac{1}{2\hbar}\sqrt{(\hbar\Omega)^2+(\hbar\Delta\omega-\frac{i\hbar\gamma_-}{2}+\Delta e_p)^2}\sigma_z},
\tag{65}
$$

Now it is suitable to introduce the following transformation in spin coherent space

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_n'}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_n''} \\ \sin\frac{\theta_n'}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_n''} \end{pmatrix} = e^{-i\frac{t_n}{2\hbar}\sqrt{(\hbar\Omega)^2+(\hbar\Delta\omega-\frac{i\hbar\gamma_-}{2}+\Delta e_p)^2}\sigma_z} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_n''}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_n'''} \\ \sin\frac{\theta_n''}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_n'''} \end{pmatrix} \tag{66}$$

then the propagator take the form

$$\begin{aligned} &K\left(z_f, \Omega_f', z_i, \Omega_i'; T\right) \\ &\quad = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p+\frac{\hbar k}{2}\right)(z_f - z_i) - \frac{iTp^2}{2m\hbar} - i\frac{\Delta e_p}{2\hbar}T\right] e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \\ &\qquad \times \lim_{N\longrightarrow\infty} \int \prod_{n=1}^{N} \frac{d\cos(\theta_n'')d\varphi'''}{2\pi} \prod_{n=1}^{N+1} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_n''}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi'''} & \sin\frac{\theta_n''}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'''} \end{pmatrix} \\ &\qquad \times \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_{n-1}''}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi'''} \\ \sin\frac{\theta_{n-1}''}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi'''} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{67}$$

which is simply

$$\begin{aligned} K\left(z_f, \Omega_f', z_i, \Omega_i'; T\right) = {} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p+\frac{\hbar k}{2}\right)(z_f - z_i) - \frac{iTp^2}{2m\hbar} - i\frac{\Delta e_p}{2\hbar}T\right] e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \\ & \times \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_f''}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_f'''} & \sin\frac{\theta_f''}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_f'''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_i''}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_i'''} \\ \sin\frac{\theta_i''}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_i'''} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{68}$$

Now we come back to the old angular variables (θ, φ). So, the exact expression of the propagator concerning to our problem is the following

$$\begin{aligned} K(f, i; T) = {} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar} - \frac{i\hbar k^2 T}{8m} + \frac{i}{\hbar}p(z_f - z_i)\right] e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \\ & \times \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_f}{2} e^{\frac{i\varphi_f}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2} e^{-\frac{i\varphi_f}{2}} \end{pmatrix} \mathbf{S}(p, T) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_i}{2} e^{-\frac{i\varphi_i}{2}} \\ \sin\frac{\theta_i}{2} e^{+\frac{i\varphi_i}{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{69}$$

Where the elements of matrix $\mathbf{S}(p, T)$ is given by (54)–(57).

4 The Wave Functions

Let us now eliminate the coherent states by computing the transition amplitude between the proper states of the spin. We take an example of the matrix element

$$K_{\uparrow\uparrow}(z_f, z_i; T) = \langle\uparrow| K(z_f, z_i; T) |\uparrow\rangle. \tag{70}$$

With the help of the completeness relations, this amplitude becomes

$$K_{\uparrow\uparrow}(z_f, z_i; T) = \frac{1}{2\pi}\int d\cos(\theta_f)d\varphi_f \frac{1}{2\pi}\int d\cos(\theta_i)d\varphi_i \\ \times \langle\uparrow|\Omega_f\rangle K(z_f, \Omega_f, z_i, \Omega_i; T)\langle\Omega_i|\uparrow\rangle \tag{71}$$

If we fix the initial state of the atom as $|m_i\rangle = |\uparrow\rangle$, and the final state as $|m_f\rangle = |\uparrow\rangle$, we obtain

$$\langle\uparrow|\Omega_f\rangle = \cos\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi_f}, \quad \text{and} \quad \langle\Omega_i|\uparrow\rangle = \cos\frac{\theta_i}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi_i}. \tag{72}$$

Substituting (72) in (71) and integrating over polar coordinates, (71) takes the following form

$$K_{\uparrow\uparrow}(z_f, z_i; T) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}p(z_f - z_i) - \frac{iTp^2}{2m\hbar} - i\frac{\Delta e_p}{2\hbar}T\right]\mathbf{S}_{11}. \tag{73}$$

In the same manner, we proceed for the remaining elements. The result takes the following matrix form

$$K(z_f, z_i; T) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}p(z_f - z_i) - \frac{iTp^2}{2m\hbar} - i\frac{\Delta e_p}{2\hbar}T\right]\mathbf{S}(T), \tag{74}$$

which coincide with those obtained in [28] using fermionic coherent states path integral.

From this propagator, the atom state at time T is deduced from the initial state via the evolution equation

$$\Psi(z, T) = \begin{pmatrix}\Psi_1(z, T)\\ \Psi_2(z, T)\end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} K(z, y; T)\Psi(y, 0)dy. \tag{75}$$

The same physical features can thus be obtained as has been done in [25] and in the case with out damping [26].

5 Conclusion

We have given an exact treatment using the path-integral formalism to the problem of the two-level atom in interaction with an electromagnetic wave. Thanks to the two variables (θ, φ) replacing the spin, the propagator has been written, first in the conventional form $\int\mathcal{D}(\text{path})\exp\frac{i}{\hbar}S(\text{path})$, then determined exactly through two methods, we see that the second method is very simple than the first method [33]. Thus the wave function has been deduced via the evolution equation. Our results through the path-integral approach are in accordance with those obtained in [25].

Finally let us note that the expression (74) has the form $\sum_{\text{path}}\exp(iS(\text{path})/\hbar)$ where the sum runs over all classical paths (parameterized here by the momentum). This form, remarkable for this problem, shows that a traditional semi-treatment can lead to an exact result.

Acknowledgements This work was supported by PNR research project 8/u05/4094 N^0 31/13.

References

1. Grosche, C., Steiner, F.: Handbook of Feynman Path Integrals. Springer, Berlin (1998)

2. Rabi, I.I.: Phys. Rev. **51**, 652 (1936)
3. Tahmasebi, M.J., Sobouti, Y.: Mod. Phys. Lett. B **5**, 1919–1925 (1991)
4. Tahmasebi, M.J., Sobouti, Y.: Mod. Phys. Lett. B **6**, 1255 (1991)
5. Lämmerzahl, C., Bordé, C.J.: Phys. Lett. A **203**, 59 (1995)
6. Qiong-Gui, L.: Phys. Lett. A **342**, 67 (2005)
7. Calvo, M., Codriansky, S.: J. Math. Phys. **24**, 553 (1983)
8. Barut, A.O., Beker, H.: Europhys. Lett. **14**, 197 (1991)
9. Mijatović, M., Ivanovski, C., Veljanoski, B., Trenčevski, K.: Z. Phys. A **345**, 65 (1993)
10. Codriansky, S., Cordero, P., Salamo, S.: Z. Phys. A **353**, 341 (1995)
11. Boudjedaa, T., Bounames, A., Nouicer, Kh., Chetouani, L., Hammann, T.F.: J. Math. Phys. **36**, 1602 (1995)
12. Boudjedaa, T., Bounames, A., Nouicer, Kh., Chetouani, L., Hammann, T.F.: Phys. Scr. **54**, 225 (1996)
13. Boudjedaa, T., Bounames, A., Nouicer, Kh., Chetouani, L., Hammann, T.F.: Phys. Scr. **56**, 545 (1998)
14. Merdaci, A., Boudjedaa, T., Chetouani, L.: Phys. Scr. **64**, 15 (2001)
15. Merdaci, A., Boudjedaa, T., Chetouani, L.: Czechoslov. J. Phys. **51**, 865 (2001)
16. Merdaci, A., Boudjedaa, T., Chetouani, L.: Eur. Phys. J. C **22**, 585 (2001)
17. Nouicer, Kh., Chetouani, L.: Phys. Lett. A **281**, 218 (2001)
18. Aouachria, M., Chetouani, L.: Can. J. Phys. **87**, 389 (2009)
19. Alscher, A., Grabert, H.: J. Phys. A **32**, 4907 (1999)
20. Alscher, A., Grabert, H.: Eur. Phys. J. D **14**, 127 (2001)
21. Aouachria, M.: Can. J. Phys. **89**, 1141 (2011)
22. Aouachria, M.: J. Korean Phys. Soc. **58**, 689 (2011)
23. Aouachria, M.: Chin. J. Phys. **49**, 689 (2011)
24. Aouachria, M., Rekik, R.: AIP Conf. Proc. **1444**, 265 (2012)
25. Zeng, G.J., Zhou, S.L., Ao, S.M., Zeng, Z.Y.: Phys. Rev. A **55**, 2945 (1997)
26. Zeng, Z.Y., Zeng, G.J., Kuang, L.M., Zhang, L.D.: Phys. Lett. A **261**, 316 (1999)
27. Aouachria, M., Chetouani, L.: Eur. Phys. J. C **25**, 333 (2002)
28. Aouachria, M., Chetouani, L.: Chin. J. Phys. **40**, 496 (2002)
29. Klauder, J.R.: Ann. Phys. **11**, 123 (1960)
30. Klauder, J.R., Skagerstam, B.S.: Coherent States Application in Physics and Mathematical Physics. World Scientific, Singapore (1985)
31. Ohnuki, Y., Kashiwa, T.: Prog. Theor. Phys. **60**, 548 (1978)
32. Perelomov, A.M.: Commun. Math. Phys. **26**, 22 (1972)
33. Aouachria, M., Halimi, F.: J. Phys. Conf. Ser. **435**, 012025 (2013)

Dynamic effects of electromagnetic wave on a damped two-level atom: Exact solution via path integral

2013 J. Phys.: Conf. Ser. 435 012025

(http://iopscience.iop.org/1742-6596/435/1/012025)

Dynamic effects of electromagnetic wave on a damped two-level atom: Exact solution via path integral

Mekki Aouachria and Farida Halimi

Laboratoire de Physique Energétique Appliquée (LPEA), Département des Sciences de la Matiére, Faculté des Sciences, Université Hadj Lakhdar, Batna, Algeria

E-mail: mekkiaouachria@yahoo.fr

Abstract. The spin coherent state path integral describing the dynamics of a two-level system interacting with electromagnetic wave of circular polarization is considered. The propagator is first written in the standard form by replacing the spin by a unit vector aligned along the polar and azimuthal directions. Then it is determined exactly using perturbation methods. Thus, the exact energy spectra with corresponding wave functions are deduced.

1. Introduction

The applications of path-integral formalism have widely increased since a large class of potentials had been resolved [1]. However it is known that the most relativistic interactions are those where the spin, which is a very useful and very important notion in physics, is taken into account. In the framework of non-relativistic theory the phenomena of spin is automatically introduced by the Pauli equation which contains the Schrödinger Hamiltonian and a spin-field interaction. This motivates the research into the solvable Pauli equations which is inevitably useful in applied physics. For instance a well-known example of its direct application is the time-dependent field acting on an atom with two levels whose time-evolution is controlled by the Pauli-type equation. The solution for this equation has made clear the associated transition amplitudes [2]. This and similar [3, 4] types of interaction aside, there are little analytical and exact computations which treat the time-dependent spin-field interaction. Furthermore, if one replaces the time dependence of the exterior field by a space-time dependence or by only space dependence this becomes even more restrictive [5, 6, 7, 8, 9, 10].

Moreover, the problem becomes nearly unsolvable if we try to build these solutions by the path integral formalism because the spin is a discrete quantity. The difficulty here is associated to the fact that the path integral lacks some classical ideas such as trajectories and up to now one does not know how to deal with this kind of technique in this important case. Thus some effort has been made to find a partial solution using the Schwinger's model of spin and some explicit computations are then carried out [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17].

A different model for spin is the use of the spin coherent state path integral which turns out to be helpful in visualizing the quantum dynamics in terms of classical ideas, and to our knowledge few explicit and semiclassical calculations are carried out [18, 19, 20]. If on the other hand the time-dependence of the exterior field is replaced by space-time dependence or space dependence, to our knowledge, the exact solution in these cases using spin coherent state path integral are very rare [21, 22, 23, 24]. The aim of this paper is to give an attempt for the case below where we present an explicit spin coherent state path integral. For this reason we are devoted to this type of interaction by considering a problem which has recently been treated according to usual quantum mechanics [25]. It acts on an atom which has two levels and which interacts with electromagnetic wave of circular polarization. The same problem has been considered with damping in ref. [26].

The purpose of this article is to deal with the same problem using the formalism of spin coherent path integral. The two-level atom with a mass m and an angular frequency ω has a dipole moment $\mathbf{D}$. The electromagnetic wave has wave vector k and angular frequency ω_L, propagating along the z-axis, and is described by the electric field

$$\mathbf{E} = \left(A\cos(\omega_L t - kz), -A\sin(\omega_L t - kz), 0\right), \tag{1}$$

where A is the amplitude of $\mathbf{E}$. The dynamics of the atom in interaction with the electromagnetic wave is described by the following Hamiltonian:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z - \frac{i\hbar}{2}\begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} + \mathbf{V}, \tag{2}$$

where

- the first term represents the kinetic energy associated with the center–of–mass momentum along the z-direction,
- the second and the third terms describe the internal movement of the atom with, $\gamma_1 = \frac{1}{\tau_1}$ and $\gamma_2 = \frac{1}{\tau_2}$, being the lifetimes of the two atomic levels,
- $\mathbf{V}$ is the interaction energy between the atom and electromagnetic wave represented in the dipole approximation by

$$\mathbf{V} = -\mathbf{DE} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\hbar\Omega e^{-i(\omega_L t - kz)} \\ -\frac{1}{2}\hbar\Omega e^{i(\omega_L t - kz)} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

where $DA = \frac{1}{2}\hbar\Omega$.

The Hamiltonian related to our problem has the following form

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_{int} \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\hbar(\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2})\sigma_z - \frac{i\hbar\gamma_+}{4}\mathbf{I} - \frac{1}{2}\hbar\Omega e^{-i(\omega_L t - kz)}\sigma_+ - \frac{1}{2}\hbar\Omega e^{i(\omega_L t - kz)}\sigma_-. \end{aligned} \tag{4}$$

where

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

are the usual Pauli matrices.

Considering this problem by the path integral approach, our motivation is the following. We show that for interaction with the coupling of spin-field type, the propagator is first written in the standard form $\sum_{\text{path}} \exp\left(iS\left(path\right)/\hbar\right)$, where S is the action that describes the system, and the discrete variable relative to spin being inserted as the (continuous) path using spin coherent states. With this approach, the formulation that uses the concept of trajectory is more suitable for a discussion of the semiclassical case which is based on the determination of classical paths. Then we show that for this interaction, the propagator is exactly calculable and the wave functions and the energy spectrum can be extracted.

We note that this problem has been recently studied using fermionic coherent state path integral [27, 28], where the authors use the Schulman-Langhlin procedure to estimate and replace the $(\Delta z_n)^2$ terms present in the action by $i\varepsilon\hbar/m$, which is translated into an effective potential. In contrary, in this article, we avoid this procedure and the effective potential naturally arises in the calculation, which is also another motivation for using the spin coherent state path integral formalism. The difference between the two approaches stems simply from the difference between the two distinct coherent states.

Our paper is organized as follows. In the next section we give some notation and the spin coherent state path integral for spin $\frac{1}{2}$ system for our further computations. In section 3, after setting up a path integral formalism for the propagator, we perform the direct calculations. To integrate over the variable of the exterior motion we introduce a particular rotation in spin-coherent state space which eliminates the phase of the electromagnetic field, then we linearise the kinetic energy term using the phase space. Consequently the effective potential $i\varepsilon\hbar/m$ naturally arises, and then we integrate over z. Accordingly, the integration over the spin variables is easy to carry out and the result is given as a perturbation series. These are summed up exactly and the explicit result of the propagator is directly computed and the wave function is then deduced. Finally, in section 4, we present our conclusions.

2. Path-integral Formulation

There are several ways to represent the spin in the path integral formalism [29, 30 , 31]. We use the simplest way [32, 19] which consists of:

- replacing σ by a unit vector $\mathbf{n}$ directed along (θ, φ),
- associating a coherent state $|\Omega\rangle$

$$|\Omega\rangle = |\theta, \varphi\rangle = e^{-i\varphi S_z} e^{-i\theta S_y} |\uparrow\rangle\,, \tag{6}$$

obtained from two rotations of the angles θ and ϕ around z and y axes over the state $|\uparrow\rangle$, and whose scalar product and projector are respectively:

$$\langle\Omega|\,\Omega'\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int d\cos(\theta)d\varphi\,|\Omega\rangle\,\langle\Omega| = \mathbf{I}. \tag{8}$$

We label by z the real variable that describes the atom position, with the corresponding projector

$$\int |z\rangle\,\langle z|\,dz = 1, \tag{9}$$

and (θ, φ) the polar variables generating the dynamics of the spin.

The transition amplitude from the initial state $|z_i, \theta_i, \varphi_i\rangle$ at $t_i = 0$ to the final state $|z_f, \theta_f, \varphi_f\rangle$ at $t_f = T$ is given by the matrix elements of the time evolution operator

$$K\left(z_f, \Omega_f, z_i, \Omega_i; T\right) = \langle z_f, \theta_f, \varphi_f \mid \mathbf{T}_D \exp(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T H dt) \mid z_i, \theta_i, \varphi_i\rangle, \tag{10}$$

where $\mathbf{T}_D$ is Dyson's time ordering symbol.

Discretizing the time $\varepsilon = T/(N+l)$, using the Trotter formula and inserting N-times the resolution of unity (8) and (9) between each pair of the evolution operator at time ε, we obtain the discretized form of the transition amplitude

$$K\left(z_f, \Omega_f, z_i, \Omega_i; T\right) = \lim_{N \longrightarrow \infty} (m/2\pi i\hbar\varepsilon)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^{n=N} dz_n \prod_{n=1}^{N+1}$$

$$\times \exp \frac{im}{2\hbar\varepsilon} \left(z_n - z_{n-1}\right)^2 K^z\left(\Omega_f, \Omega_i; T\right), \tag{11}$$

with

$$K^z\left(\Omega_f, \Omega_i; T\right) = \lim_{N \longrightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N} \frac{d\cos(\theta_n) d\varphi_n}{2\pi}$$

$$\times \prod_{n=1}^{N+1} \left[\langle \Omega_n \mid \Omega_{n-1}\rangle - i\varepsilon \left\langle \Omega_n \right| H_{int} \left|\Omega_{n-1}\right\rangle\right], \tag{12}$$

where

$$z_{N+1} = z_f, \quad \Omega_{N+1} = \Omega_f \quad \text{and} \qquad z_0 = z_i, \quad \Omega_0 = \Omega_i. \tag{13}$$

It is easy to find that the following matrix elements:

$$\begin{aligned}
\left\langle \Omega \right| \sigma_z \left|\Omega'\right\rangle &= \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2} e^{+\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')} - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\varphi')}, && (14)\\
\left\langle \Omega \right| \sigma_+ \left|\Omega'\right\rangle &= \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2} e^{+\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}, && (15)\\
\left\langle \Omega \right| \sigma_- \left|\Omega'\right\rangle &= \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2} e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\varphi')}, && (16)
\end{aligned}$$

and the propagator related to our problem (11) takes the form of Feynman path integral

$$K = \int Dpath \exp(iAction), \tag{17}$$

which means in our case:

$$K\left(z_f, \Omega_f, z_i, \Omega_i; T\right) = \lim_{N \longrightarrow \infty} (m/2\pi i\hbar\varepsilon)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^{n=N} dz_n \prod_{n=1}^{N+1} \exp \frac{im}{2\hbar\varepsilon} \left(z_n - z_{n-1}\right)^2$$

$$\times \int \prod_{n=1}^{N} \frac{d\cos(\theta_n) d\varphi_n}{2\pi} \exp\left\{ \sum_{n=1}^{n=N+1} \left[\log < \Omega_n \left|\Omega_{n-1}\right\rangle - i\varepsilon \frac{\left\langle \Omega_n \right| H_{int} \left|\Omega_{n-1}\right\rangle}{< \Omega_n \left|\Omega_{n-1}\right\rangle}\right]\right\}. \tag{18}$$

Having obtained the conventional form it remains to integrate it in order to extract the interesting physical properties. We thus proceed to the calculation of $K\left(z_f, \Omega_f, z_i, \Omega_i; T\right)$.

3. The calculation of the propagator

We note that (18) can be rewritten in the form

$$K\left(z_f, \Omega_f, z_i, \Omega_i; T\right) = \lim_{N \longrightarrow \infty} (m/2\pi i\hbar\varepsilon)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^{n=N} dz_n \prod_{n=1}^{N+1}$$

$$\times e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \exp \frac{im}{2\hbar\varepsilon} (z_n - z_{n-1})^2 \lim_{N\longrightarrow\infty} \int \prod_{n=1}^{N} \frac{d\cos(\theta_n) d\varphi_n}{2\pi}$$

$$\times \prod_{n=1}^{N+1} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_n} & \sin\frac{\theta_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_n} \end{pmatrix} R(z_n, t_n) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}} \\ \sin\frac{\theta_{n-1}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

with

$$R(z_n, t_n) = \begin{pmatrix} 1 - i\varepsilon\frac{1}{2}\left(\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right) & i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega e^{-i(\omega_L t_n - kz_n)}) \\ i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega e^{i(\omega_L t_{n-1} - kz_{n-1})} & 1 + i\varepsilon\frac{1}{2}\left(\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right) \end{pmatrix}. \tag{20}$$

To integrate it is necessary to first eliminate the inconvenient terms $e^{-i(\omega_L t_n - kz_n)}$ and $e^{i(\omega_L t_{n-1} - kz_{n-1})}$ with the help of the following change of variable:

$$\varphi_n = \varphi_n' + \omega_L t_n - kz_n. \tag{21}$$

Then, the measure

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{d\cos(\theta_n) d\varphi_n}{2\pi} = \prod_{n=1}^{N} \frac{d\cos(\theta_n) d\varphi_n'}{2\pi}, \tag{22}$$

remains unchanged. The expression (19) becomes

$$K\left(z_f, \Omega_f', z_i, \Omega_i'; T\right) = \lim_{N\longrightarrow\infty} (m/2\pi i\hbar\varepsilon)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^{n=N} dz_n \prod_{n=1}^{N+1}$$

$$\times e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \exp \frac{im}{2\hbar\varepsilon} (z_n - z_{n-1})^2 \lim_{N\longrightarrow\infty} \int \prod_{n=1}^{N} \frac{d\cos(\theta_n) d\varphi_n'}{2\pi}$$

$$\times \prod_{n=1}^{N+1} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_n}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_n'} & \sin\frac{\theta_n}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_n'} \end{pmatrix} R_1(z_n, t_n) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_{n-1}}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_{n-1}'} \\ \sin\frac{\theta_{n-1}}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_{n-1}'} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

where

$$R_1(z_n, t_n) = \begin{pmatrix} 1 - i\varepsilon\frac{1}{2}\left(\Delta\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right) e^{-i\frac{k}{2}\Delta z_n} & i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega \\ i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega & 1 + i\varepsilon\frac{1}{2}\left(\Delta\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right) e^{+i\frac{k}{2}\Delta z_n} \end{pmatrix} \tag{24}$$

and $\Delta\omega = \omega - \omega_L$

Then we use the following identity:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{-i\varepsilon}{2m\hbar} p_n^2 + \frac{i}{\hbar} p_n \left(\Delta z_n \pm \frac{\varepsilon\hbar}{2m} k\right)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon\hbar}} \exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar}\left(\Delta z_n \pm \frac{\varepsilon\hbar}{2m} k\right)^2\right]. \tag{25}$$

Thus the propagator (23) can be rewritten as:

$$K\left(z_f,\Omega'_f,z_i,\Omega'_i;T\right)=\lim_{N\longrightarrow\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{n=1}^{n=N}dz_n\prod_{n=1}^{n=N+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}$$
$$\times\exp\sum_{n=1}^{n=N+1}\left[\frac{-i\varepsilon}{2m\hbar}p_n^2+\frac{i}{\hbar}p_n\Delta z_n-i\frac{\varepsilon\hbar}{8m}k^2\right]\lim_{N\longrightarrow\infty}\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d\cos(\theta_n)d\varphi'_n}{2\pi}\prod_{n=1}^{N+1}$$
$$\times\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta'_n}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi'_n} & \sin\frac{\theta'_n}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n}\end{pmatrix}R_2(z_n,t_n)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta'_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}}\\ \sin\frac{\theta'_{n-1}}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}}\end{pmatrix},\quad(26)$$

where

$$R_2(p_n,t_n)=\begin{pmatrix}1-i\varepsilon(\frac{1}{2}\left(\Delta\omega-\frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right)+\frac{p_nk}{2m}) & i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega\\ i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega & 1+i\varepsilon\left(\frac{1}{2}\left(\Delta\omega-\frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right)+\frac{p_nk}{2m}\right)\end{pmatrix}.\quad(27)$$

By integrating over the N variables z_n, we clearly get Dirac functions $\delta\left(\dot{p}\right)$ which reflects the conservation of the atom impulsion during the movement, i.e:

$$p_1=p_2=\cdots=p_{N+1}=p.\quad(28)$$

Hence the propagator (25) takes the following form

$$K\left(z_f,\Omega'_f,z_i,\Omega'_i;T\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)-\frac{iTp^2}{2m\hbar}-iT\frac{\hbar k^2}{8m}\right]$$
$$\times\lim_{N\longrightarrow\infty}\int\prod_{n=1}^{N}\frac{d\cos(\theta_n)d\varphi'_n}{2\pi}$$
$$\times\prod_{n=1}^{N+1}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta'_n}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi'_n} & \sin\frac{\theta'_n}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi'_n}\end{pmatrix}R_2(p,t_n)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta'_{n-1}}{2}e^{-\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}}\\ \sin\frac{\theta'_{n-1}}{2}e^{+\frac{i}{2}\varphi'_{n-1}}\end{pmatrix},\quad(29)$$

where

$$R_2(p,t_n)=\begin{pmatrix}1-i\varepsilon\left(\frac{1}{2}\left(\Delta\omega-\frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right)+\frac{pk}{2m}\right) & i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega\\ i\varepsilon\frac{1}{2}\Omega & 1+i\varepsilon\left(\frac{1}{2}\left(\Delta\omega-\frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right)+\frac{pk}{2m}\right)\end{pmatrix}.\quad(30)$$

let us integrate on the anguler variables $\theta_n$et φ'_n
the propagateur takes the following form

$$K(f,i;T)=e^{-\frac{T\gamma_+}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}p(z_f-z_i)-\frac{iTp^2}{2m\hbar}-iT\frac{\hbar k^2}{8m}\right]$$
$$\times\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_f}{2}e^{\frac{i\varphi'_f}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2}e^{-\frac{i\varphi'_f}{2}}\end{pmatrix}R\left(p,T\right)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta_i}{2}e^{-\frac{i\varphi'_i}{2}}\\ \sin\frac{\theta_i}{2}e^{\frac{i\varphi'_i}{2}}\end{pmatrix}.\quad(31)$$

with

$$R\left(p,T\right)=\lim_{N\longrightarrow\infty}(-1)^N\prod_{\underleftarrow{n=1}}^{n=N+1}R_2(p,t_n),\quad(32)$$

Journal of Physics: Conference Series **435** (2013) 012025 doi:10.1088/1742-6596/435/1/012025

The arrow under the product symbol indicates the time ordering operation. We concentrate on the evaluation of the matrix elements $R_{ij}(p,T)$. To this aim the matrix $R(p,t_n)$ is written as a sum of a diagonal matrix and an off-diagonal matrix. To first order in ε we have

$$R(p,t_n) = e^{-i\varepsilon\omega(j)\sigma_z} + i\varepsilon K(n),$$

where the off-diagonal matrix is given by

$$K(n) = \begin{pmatrix} 0 & u(n) \\ u(n) & 0 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

with

$$\omega(n) = \frac{1}{2}\left(\Delta\omega - \frac{i\hbar\gamma_-}{2}\right) + \frac{kp}{2m}, \text{ and } \quad u(n) = \frac{\Omega}{2}, \tag{34}$$

let us pass to the calculation of produce matrix according to [11]

$$\begin{aligned}
&\prod_{n=1}^{N}(e^{-i\varepsilon\omega(n)\sigma_z} + i\varepsilon K(n)) = \\
&\quad = e^{-i\sum\limits_{j=1}^{N}\varepsilon\omega(j)\sigma_z} + \sum_{l=1}^{N}(i\varepsilon)e^{-i\sum\limits_{l+1}^{N}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l)e^{-i\sum\limits_{1}^{l-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z} \\
&\quad + \sum_{l_1=1}^{N}\sum_{l_2=1}^{l_1-1}(i\varepsilon)^2 e^{-i\sum\limits_{l_1+1}^{N}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_1)e^{-i\sum\limits_{l_2+1}^{l_1-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_2)e^{-i\sum\limits_{1}^{l_1-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z} + ... \\
&\quad + \sum_{l_1=1}^{N}\sum_{l_2=1}^{l_1-1}\sum_{l_3=1}^{l_2-1}...\sum_{l_{N-1}=1}^{l_{N-2}-1}\sum_{l_N=1}^{l_{N-1}-1}(i\varepsilon)^N e^{-i\sum\limits_{l_1+1}^{N}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_1)e^{-i\sum\limits_{l_2+1}^{l_1-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_2) \\
&\quad e^{-i\sum\limits_{l_3+1}^{l_2-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}...e^{-i\sum\limits_{l_{N-1}+1}^{l_{N-2}-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_{N-1})e^{-i\sum\limits_{l_N+1}^{l_{N-1}-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}K(l_N)e^{-i\sum\limits_{1}^{l_N-1}\varepsilon\omega(k)\sigma_z}.
\end{aligned} \tag{35}$$

Taking the limit $N \longrightarrow +\infty$ of (36) leads to

$$\begin{aligned}
R(p,T) &= e^{-i\int_0^T ds\omega(p,s)\sigma_z} + i\int_0^T ds_1 e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_1)e^{-i\int_0^{s_1} ds\omega(p,s)\sigma_z} \\
&\quad + (i)^2\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2 e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_1)e^{-i\int_{s_2}^{s_1} ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_2) \\
&\quad + ...(i)^N\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\int_0^{s_2} ds_3...\int_0^{s_{N-1}} ds_N e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_1) \\
&\times e^{-i\int_{s_2}^{s_1} ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_2)...K(s_{N-1})e^{-i\int_{s_N}^{s_{N-1}} ds\omega(p,s)\sigma_z}K(s_N)e^{-i\int_0^{s_N} ds\omega(p,s)\sigma_z} + ...
\end{aligned} \tag{36}$$

a simple calculation shows us that the terms odd respectively even are the element antidiagonaux respectitively diagonal of R.

$$\begin{aligned}
R_{11}(p,T) &= e^{-i\int_0^T ds\omega(p,s)} + \sum_{n=1}^{\infty} i^{2n}\int_0^T ds_1\int_0^{s_1} ds_2\int_0^{s_2} ds_3...\int_0^{s_{2n-1}} ds_{2n}\times \\
&\quad e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)}u(p(s_1),s_1)e^{+i\int_{s_2}^{s_1} ds\omega(p,s)}u(p(s_2),s_2) \\
&\quad \times ...e^{+i\int_{s_{2n}}^{s_{2n-1}} ds\omega(p,s)}u(p(s_{2n}),s_{2n})e^{-i\int_0^{s_{2n}} ds\omega(p,s)}
\end{aligned} \tag{37}$$

and

$$R_{12}(p,T) = i\int_0^T ds_1 e^{-i\int_{s_1}^T ds\omega(p,s)} u(p(s_1),s_1) R_{22}(p(s_1),s_1), \tag{38}$$

$$\begin{aligned} R_{22}(p,T) &= R_{11}^*(p,T), \\ R_{21}(p,T) &= -R_{12}^*(p,T). \end{aligned} \tag{39}$$

For instance

$$R_{11}(p,T) =$$

$$\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(i\frac{\Omega}{2})^{2n}\int_0^T e^{i\Delta s_1}ds_1\int_0^{s_1} e^{-i\Delta s_2}ds_2 ... \int_0^{s_{2n-1}} e^{-i\Delta s_{2n}}ds_{2n}\right] e^{-i\frac{T\Delta}{2}}, \tag{40}$$

with

$$\Delta = 2\omega(n,s). \tag{41}$$

$$\omega(n,s) = \frac{\Delta\omega}{2} - \frac{i\gamma_-}{4} + \frac{kp}{2m} \tag{42}$$

4. Summation of the perturbation series

Let us put

$$F(0,T) = \sum_{n=1}^{\infty}(i\frac{\Omega}{2})^{2n}\int_0^T e^{i\Delta s_1}ds_1\int_0^{s_1} e^{-i\Delta s_2}ds_2 ... \int_0^{s_{2n-1}} e^{-i\Delta s_{2n}}ds_{2n}$$

The evaluation of this multiple integral which has the form of a repeated convolution product, proceeds by taking the Laplace transform of all functions with respect to the time differences in their arguments and using the convolution theorem of Laplace transform [11]. The result is

$$\widetilde{F}(0,q) = \int_0^{+\infty} dT e^{-qT} F(0,T)dT = .\frac{1}{q}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-\Omega^2/4}{q(q-i\Delta)}\right]^n$$

the sum over N is carried out with the result

$$\widetilde{F}(0,q) = \frac{q-i\Delta}{q(q-i\Delta)+\frac{\Omega^2}{4}} - \frac{1}{q}$$

this result is valid for $\mid \frac{(i\frac{\Omega}{2})^2}{q(q-i\Delta)} \mid < 1$.We notice that is possible to get a contour of the inverse Laplace integration where the condition above is verified. Taking the inverse Laplace transform we obtain for the element $R_{11}(p,T)$ the expression

$$R_{11}(p,T) = \cos(\Omega' T) - \frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin(\Omega' T), \quad \text{with} \quad \Omega' = \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Omega^2}{4}}$$

Following the same method of calculations, the remaining elements are calculated and listed below

$$R_{12}(p,T) = \frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin(\Omega' T), \tag{43}$$

$$R_{21}(p,T) = \frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin(\Omega' T), \tag{44}$$

$$R_{22}(p,T) = \cos(\Omega' T) + \frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin(\Omega' T). \tag{45}$$

Substituting this result in the equation (31) the propagator takes finally the from:

$$\begin{aligned} K(f,i;T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar} - \frac{i\hbar k^2 T}{8m} + \frac{i}{\hbar}p(z_f - z_i)\right] \\ &\times \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_f}{2} e^{\frac{i\varphi_f'}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2} e^{-\frac{i\varphi_f'}{2}} \end{pmatrix} R(p,T) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_i}{2} e^{-\frac{i\varphi_i'}{2}} \\ \sin\frac{\theta_i}{2} \exp(+\frac{i\varphi_i'}{2}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{46}$$

with

$$R(p,T) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega' T) - \frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin(\Omega' T) & -\frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin(\Omega' T) \\ -\frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin(\Omega' T) & \cos(\Omega' T) + \frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin(\Omega' T) \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Now we come back to the old angailars variables (θ, φ). So, the exact expression of the propagator concerning to our problem is the following

$$\begin{aligned} K(f,i;T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[-\frac{iTp^2}{2m\hbar} - \frac{i\hbar k^2 T}{8m} + \frac{i}{\hbar}p(z_f - z_i)\right] e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \\ &\cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_f}{2} e^{\frac{i\varphi_f}{2}} & \sin\frac{\theta_f}{2} e^{-\frac{i\varphi_f}{2}} \end{pmatrix} \mathbf{S}(p,T) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_i}{2} e^{-\frac{i\varphi_i}{2}} \\ \sin\frac{\theta_i}{2} e^{+\frac{i\varphi_i}{2}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{48}$$

Where the elements of matrix $\mathbf{S}(p,T)$ is given by:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{11}(p,T) &= \left[\cos\Omega' T - \frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin\Omega' T\right] e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \exp\frac{i}{2}(kz_f - \omega_L T - kz_i), & (49) \\ \mathbf{S}_{22}(p,T) &= \left[\cos\Omega' T + \frac{i\Delta}{2\Omega'}\sin\Omega' T\right] e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \exp -\frac{i}{2}(kz_f - \omega_L T - kz_i), & (50) \\ \mathbf{S}_{12}(p,T) &= -\frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin\Omega' T e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \exp\frac{i}{2}(kz_f - \omega_L T + kz_i), & (51) \\ \mathbf{S}_{21}(p,T) &= -\frac{i\Omega}{2\Omega'}\sin\Omega' T e^{-\frac{T\gamma_+}{4}} \exp -\frac{i}{2}(kz_f - \omega_L T + kz_i). & (52) \end{aligned}$$

The angles θ, φ are allowed to vary only in the limited domains $[0, 2\pi]$ and $[0, 4\pi]$. Our propagator is the following:

$$\begin{aligned} K(f,i;T) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K(z_f, \theta_f + 2n\pi, z_i, \varphi_f + 4n\pi,\ \theta_i, \varphi_i; T) \\ &= K(z_f, \Omega_f, z_i, \Omega_i; T) \end{aligned} \tag{53}$$

It is an expression for the propagator in the spin coherent state representation.

5. The wave functions

Let us now eliminate the coherent states by computing the transition amplitude between the proper states of the spin. We take an example of the matrix element

$$K_{\uparrow\uparrow}(z_f, z_i; T) = \langle\uparrow|K(z_f, z_i; T)|\uparrow\rangle. \tag{54}$$

With the help of the completeness relations, this amplitude becomes

$$K_{\uparrow\uparrow}(z_f, z_i; T) = \frac{1}{2\pi}\int d\cos(\theta_f) d\varphi_f \frac{1}{2\pi}\int d\cos(\theta_i) d\varphi_i$$

$$\times \langle \uparrow | \Omega_f \rangle \, K\left(z_f, \Omega_f, z_i, \Omega_i; T\right) \langle \Omega_i | \uparrow \rangle \tag{55}$$

If we fix the initial state of the atom as $|m_i\rangle = |\uparrow\rangle$, and the final state as $|m_f\rangle = |\uparrow\rangle$, we obtain

$$\langle \uparrow | \Omega_f \rangle = \cos \frac{\theta_f}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_f}, \qquad \text{and} \qquad \langle \Omega_i | \uparrow \rangle = \cos \frac{\theta_i}{2} e^{+\frac{i}{2}\varphi_i}. \tag{56}$$

Substituting (56) in (55) and integrating over polar coordinates, (55) takes the following form

$$K_{\uparrow\uparrow}(z_f, z_i; T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \; \exp\left[\frac{i}{\hbar} p(z_f - z_i) - \frac{iTp^2}{2m\hbar} - i\frac{\Delta e_p}{2\hbar} T\right] \mathbf{S}_{11}. \tag{57}$$

In the same manner, we proceed for the remaining elements. The result takes the following matrix form

$$K\left(z_f, z_i; T\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar} p(z_f - z_i) - \frac{iTp^2}{2m\hbar} - i\frac{\Delta e_p}{2\hbar} T\right] \mathbf{S}\left(T\right), \tag{58}$$

which coincide with those obtained in [28] using fermionic coherent states path integral.

From this propagator, the atom state at time T is deduced from the initial state via the evolution equation

$$\Psi(z, T) = \begin{pmatrix} \Psi_1(z, T) \\ \Psi_2(z, T) \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} K(z, y; T) \Psi(y, 0) dy. \tag{59}$$

The same physical features can thus be reobtained as has been done in [25] and in the case with out damping done in [26].

6. Conclusion

We have given an exact treatment using the path-integral formalism to the problem of the two-level atom in interaction with an electromagnetic wave. Thanks to the two variables (θ, φ) replacing the spin, the propagator has been written, first in the conventional form $\int \mathcal{D}(path) \exp \frac{i}{\hbar} S(path)$, then determined with exactitude. Thus the wave function has been deduced via the evolution equation. Our results through the path-integral approach are in accordance with those obtained in [25].

Finally let us note that the expression (58) has the form $\sum_{\text{path}} \exp\left(iS\left(path\right)/\hbar\right)$ where the sum runs over all classical paths (parameterized here by the momentum). This form, remarkable for this problem, shows that a traditional semi-treatment can lead to an exact result.

Acknowledgments

This work was supported by PNR research project 8/u05/4094 N^0 31/13.

References

[1] Grosche C and Steiner F 1998 *Handbook of Feynman Path Integrals* (Verlag: Springer)
[2] Rabi I. I. 1936 *Phys. Rev.* **51** 652
[3] Tahmasebi M J and Sobouti Y 1991 *Mod. Phys. Lett.* B **5** 1919
[4] Tahmasebi M J and Sobouti Y 1991 *Mod. Phys. Lett.* B **6** 1255
[5] Lämmerzahl C and Bordé C J 1995 *Phys. Lett.* A **203** 59
[6] Qiong-Gui L 2005 *Phys. Lett.* A **342** 67
[7] Calvo M and Codriansky S 1983 *J. Math. Phys.* **24** 553
[8] Barut A O and Beker H 1991 *Eur. Phys. Lett.* **14** 197
[9] Mijatović M, Ivanovski C, Veljanoski B and Trenčevski K 1993 Z. *Phys.* A **345** 65
[10] Codriansky S, Cordero P and Salamo S 1995 *Z. Phys.* A **353** 341

[11] Boudjedaa T, Bounames A, Nouicer Kh, Chetouani L and Hammann T F 1995 *J. Math. Phys.* **36** 1602
[12] Boudjedaa T, Bounames A, Nouicer Kh, Chetouani L and Hammann T F 1996 *Phys. Scripta.* **54** 225
[13] Boudjedaa T, Bounames A, Nouicer Kh, Chetouani L and Hammann T F 1998 *Phys. Scripta.* **56** 545
[14] Merdaci A, Boudjedaa T and Chetouani L 2001 *Phys. Scripta.* **64** 15
[15] Merdaci A, Boudjedaa T and Chetouani L 2001 *Czech. J. Phys.* **51** 865
[16] Merdaci A, Boudjedaa T and Chetouani L 2001 *Eur. Phys. J. C* **22** 585
[17] Nouicer Kh and Chetouani L 2001 *Phys. Lett.* A **281** 218
[18] Aouachria M and Chetouani L 2009 *Can. J. Phys.* **87** 389
[19] Alscher A and Grabert H 1999 *J. Phys.* A **32** 4907
[20] Alscher A and Grabert H 2001 *Eur. Phys. J.* D **14** 127
[21] Aouachria M 2011 *Can. J. Phys.* **89** 1141
[22] Aouachria M 2011 *J. Korean. Phys. Soc.* **58** 689
[23] Aouachria M 2011 *Chinese. J. Phys.* **49** 689
[24] Aouachria M and Rekik R 2012 *AIP Conf. Proc.* **1444** 265
[25] Zeng G J, Zhou S L, Ao S M and Zeng Z Y 1997 *Phys. Rev.* A **55** 2945
[26] Zeng Z Y, Zeng G J, Kuang L M and Zhang L D 1999 *Phys. Lett.* A **261** 316
[27] Aouachria M and Chetouani L 2002 *Eur. Phys. J.* C **25** 333
[28] Aouachria M and Chetouani L 2002 *Chinese. J. Phys.* **40** 496
[29] Klauder J R 1960 *Ann. Phys.* (NY)**11** 123
[30] Klauder J R and Skagerstam B S 1985 *Coherent states application in physics and mathematical physics* (Word Scientific, Singapore)
[31] Ohnuki Y and Kashiwa T 1978 *Prog. Theor. Phys.* **60** 548
[32] Perelomov A M 1972 *Commun. Math. Phys.* **26** 22

الملخص:

الهدف من هذه الرسالة هو تطبيق نظرية تكامل مسالكFeynman على مسألتين تخص الميكانيك الكمي :

- **تفاعل ذرة ذات مستويين مع موجة كهرومغناطيسية.**
- **نموذج Jaynes cummings بوجود فعل كار.**
    - **من أجل معالجة هذه المسائل نعتمد على:**
- **سعة الانتقال التي تكتب في البداية على الشكل النظامي** $\int D(path)\exp\frac{i}{\hbar}s(path)$ **حيث** s **هو الفعل الذي يصف النظام.**
- **تعويض الشعاع** $\vec{\sigma}$ **بشعاع الوحدة** $\vec{n}$ **اتجاهه معرف بالزوايا** (θ,φ).
- **تحويلات على مستوى الزوايا** (θ,φ).
- **استعمال نهاية مجموع متتالية هندسية من أجل حساب** $R(p,T)$.
- **استعمال نظرية الاضطرابات ونظرية البواقي وتحويل LAPLACEمن أجل إيجاد الحل الدقيق.**
- **بعد تطبيق نظرية تكامل مسالكFeynman على هذه المسائل توصلنا إلى نفس النتائج التي توصل إليه المؤلفون من خلال معادلة شرود نغر.**

<u>الكلمات المفتاحية:</u> التكامل على المسالك,الحالة المتلاحمة,الطريقة التحليلية الدالية ,دالة الموجة .

<u>Résumé :</u>

Le but de cette thèse est d'appliqué la théorie des intégrales du chemin de Feynman pour deux problèmes de la mécanique quantique :

A. Atome à deux niveaux instables en interaction avec une onde Électromagnétique de polarisation circulaire
B. Le modèle de Jaynes Cummings pseudo-hermétique en présence de l'effet de Kerr non linéaire.

Pour traiter les problèmes il faut se baser sur quelque point :

- l'amplitude de transition qui a été exprimée d'abord sous la forme standard $\int D(path)\exp\frac{i}{\hbar}s(path)$ ou' S est l'effet qui explique le système.
    - -Remplacer $\vec{\sigma}$ par vecteur unitaire $\vec{n}$ dirigé selon (θ,φ).
    - utilisé la théorie de perturbation et la transformation de Laplace et la théorie de résidu pour trouver la solution exacte.
    - Les transformations au niveau des angles (θ,φ) .
    - Utilisation de la définition de la limite de somation de suite géométrique pour calculer $R(p,T)$.

Après l'application de la théorie des intégrales du chemin de Feynman pour les problèmes, les résultats trouvés sont aussi en bon accord avec ceux donnés par d'autres auteurs pour résoudre l´équation de Schrödinger.

<u>Mots clés</u>: Intégral de chemins, les états cohérents, les fonctions d'onde, Méthodes analytiques fonctionnelles.

<u>Abstract:</u>

The goal of this thesis is applied the theory of the path integral of way of Feynman for two problems of quantum mechanics:

- Exact Spin Coherent State Path Integral for a Damped Two-Level Atom in an Electromagnetic Wave.
- the spin coherent state path integral for jaynes-cummings model with a pseudo hermitian hamiltonian and nonlinear kerr
  To deal with the problems it is necessary based on some point:

the amplitude of transition which was expressed initially under A forms standard $\int D(path)\exp\frac{i}{\hbar}s(path)$. S is the action explains the system.

- To replace $\vec{\sigma}$ by unit vector $\vec{n}$ directed according to (θ,φ).
- Used the convolution theorem and the transformation of Laplace and the theorem of residue to find the solution exact.
- Transformations on the angles (θ,φ).
- Used the definition of the limit of geometrical acquired characteristic of continuation to calculate $R(p,T)$.

After the theory of the integral of way of Feynman for the problems are applied authors in resolving the equation of Schrödinger.

<u>Keywords</u>: Path integral of ways, coherent states, wave of functions, functional analytical methods.